Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 8

1.)

Ich berechne zunächst die ersten vier linearen Teilfunktionen des Polygonzuges:

$$y_{1,n} = x \cdot 0 = 0 \qquad \text{für } x \in [0, x_1],\ x_1 = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

$$y_{2,n} = (x - x_1)\, f\left(x_1, y_{1,n}(x_1)\right)$$

$$= (x - x_1)\, x_1 \sin\tfrac{p}{x_1} = \left(x - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \sin p\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{für } x \in [x_1, x_2]$$

Fallunterscheidung:

n gerade:

$$y_{2,n} = \left(x - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

n ungerade:

$$y_{2,n} = \left(x - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)\frac{-1}{n+\frac{1}{2}}$$

Für $x = x_2 = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$ gilt:

$$y_2 = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \qquad\qquad y_2 = \frac{-1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$y_{3,n}$ für $x \in [x_2, x_3]$

n gerade:

$$y_{3,n} = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + (x - x_2)\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{n+\frac{1}{2}} \sin\frac{p\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \left(x - \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$y_{3,n}(x_3) = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1+\sqrt{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

das schätze ich jetzt nach unten ab:

$$y_{3,n}(x_3) \geq \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c_1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

n ungerade:

$$y_{3,n} = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \left(x - \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{-1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1+\sqrt{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$y_{3,n}\left(x_3\right) = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1+\sqrt{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

und die Abschätzung:

$$y_{3,n}\left(x_3\right) \le \frac{-1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c_2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$y_{4,n}$ für $x \in \left[x_3, x_4\right]$:

n gerade:

$$y_{4,n} = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \left(x - \frac{3}{n+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}}} \pm \frac{3}{n+\frac{1}{2}}\sin\frac{p\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3}\right)$$

$$y_{4,n}\left(x_4\right) = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{8}}} \pm \frac{3}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin\frac{p\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3}$$

$$y_{4,n}\left(x_4\right) \ge \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{8}}}$$

n ungerade:

$$y_n\left(x_4\right) \le -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{11}{8}}},$$

wobei die letzten beiden Abschätzungen auf $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tilde{k}\sin\frac{p\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\tilde{k}}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 0 \quad \forall\tilde{k}, 1 \le \tilde{k} \le n$ beruhen.

Das kann man so weiter fortsetzen.
Folglich existieren für alle *n* zwei verschiedene Eulersche Polygonzüge im 1. (pos. Fkt.-werte der Teilfunktionen) und 4. Quadranten (neg. Fkt.-werte der Teilfunktionen), d.h. sie können nicht gegen eine Funktion konvergieren.

2.)

Zum Beweis benutze ich folgenden Satz aus [Walter, "Gewöhnliche Differentialgleichungen", S. 83f]:
Es sei $f(x, y)$ in *D* erklärt, $D \subset \mathbb{R}^2$ beliebig. Man nennt die Funktion *v(x)* Unterfunktion bzw. die Funktion *w(x)* Oberfunktion bezüglich des AWP

$$y' = f(x, y) \text{ in } J : x \le x \le x + a,\ y(x) = h$$

wenn sie in *J* differenzierbar ist und wenn

$$v' < f(x, v) \text{ in } J \text{ und } v(x) \le h$$
$$w' > f(x, w) \text{ in } J \text{ und } w(x) \ge h$$

[...] Sei nun y eine Lösung des AWP, so gilt:

$$v(x) < y(x) < w(x) \text{ in } J_0 : x < x \le x + a .$$

Beweis mit Fallunterscheidung für jeden Quadranten:

1. Quadrant: $f(x, y) < 0$

Es gilt $0 \le y \le b$ sowie $0 \le x \le a$. (*)

Weiterhin $\sup f \le 0$ und, da *f* stetig und im Definitionsbereich beschränkt, $\min f = -c$ (*c*=const)
Also $-c \le y' = f(x, y) \le 0$
Ungleichung integrieren:
$-cx + d_1 \le y + d_2 \le d_3$
Anfangswert $y(0) = 0$ nach dem Satz auch in Ober- und Unterfunktion beachten:
$-cx \le y \le 0$
Daraus folgt mit (*), dass $y = 0$.

2. Quadrant: $f(x, y) > 0$

Es gilt $0 \le y \le b$ sowie $-a \le x \le 0$. (**)

Weiterhin $\inf f \ge 0$ und, da *f* stetig und im DB beschränkt, $\max f = c$ (*c*=const)
Also $0 \le y' = f(x, y) \le c$
Ungleichung integrieren:
$d_1 \le y + d_2 \le cx + d_3$
Anfangswert $y(0) = 0$ nach dem Satz auch in Ober- und Unterfunktion beachten:
$0 \le y \le cx$
Daraus folgt mit (*), diesmal ist $x < 0$, dass $y = 0$.

Analog kann man das für den 3. und 4. Quadranten zeigen, was ich mir hier aber erspare.

□

3.)

Ich berechne die sukzessiven Approximationen des geg.

$$f(x,y) = \begin{cases} -2x & \text{für} \quad y \ge x^2 \quad (i) \\ -2y/x & \text{für} \quad |y| < x^2 \quad (ii) \\ 2x & \text{für} \quad y \le -x^2 \quad (iii) \end{cases}$$

mit $y_0(x) = x^2, \qquad y_{n+1}(x) = \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt, \qquad n = 0,1,\ldots$

$$y_1 = \int_0^x f(t,t^2)\,dt = \int_0^x \underbrace{-2x}_{\text{(i) } y \ge x^2} dt = -x^2$$

$$y_2 = \int_0^x f(t,t^2)\,dt = \int_0^x \underbrace{2x}_{\text{(iii) } y \le -x^2} dt = x^2$$

$$\vdots$$

$$\underline{y_n = (-1)^n x^2}$$

Also ergibt sich eine alternierende Folge, die nicht konvergiert für $x \ne 0$.

Um nun nach 2) zu zeigen, dass $y' = f(x,y)$ nur die Lösung $y(0) = 0$ besitzt, muss zunächst als Vorraussetzung die Stetigkeit von $f(x,y)$ nachgewiesen werden:

Stetigkeit an den Sprungstellen:

$$\lim_{y \to x^2} f(x,y) = \lim_{y \to x^2} -\frac{2y}{x} = \lim_{y \to x^2} -\frac{2x^2}{x} = \underline{-2x}$$

$$\lim_{y \to -x^2} f(x,y) = \lim_{y \to -x^2} -\frac{2y}{x} = \lim_{y \to -x^2} \frac{2x^2}{x} = \underline{2x} \qquad \forall x \ne 0$$

Stetigkeit an $(0,0)$, d.h. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Klar für (i) und (iii).

(ii): es muss $|f(x,y) - 0| < e$ falls $\sqrt{x^2 + y^2} < d$

also ist $|f(x,y) - 0| = \left|-\frac{2y}{x}\right| = \left|\frac{2y}{x}\right| \le \left|\frac{2x^2}{x}\right| = 2|x| < 2d = e$ erfüllt für $d = \frac{1}{2}e$.

Weiterhin muss nach Voraussetzung $f(x,y) < 0$ für $xy > 0$ und $f(x,y) > 0$ für $xy < 0$ gezeigt werden:

1. Quadrant: x>0 und y<0: Fall (i) und (ii) und in beiden ist $f(x,y)$ negativ

2. Quadrant: x<0 und y>0: Fall (i) und (ii) und dann ist $f(x,y)$ positiv

analog für 3. ($f(x,y) < 0$) und 4. Quadranten ($f(x,y) > 0$).

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz aus Aufgabe 2) erfüllt, d.h. es existiert nur eine Lösung $y(0) = 0$ und die Folge $\{y_n\}_{n \ge 1}$ ist nicht konvergent.

4.)

a)

Zu zeigen ist, dass die Folge der Eulerschen Polygonzüge $\{y_n\}_{n\geq 1}$ gleichmäßig (gegen die Lösung $y(x)$) konvergiert, wenn die Lösung eines AWP $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$ gemäß Satz von Picard-Lindelöf eindeutig bestimmt ist.

Beweis:

Es sei $\{z_l\}_{l\geq 1}$ die Zerlegungsfolge des Polygonzuges für das Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$.
Sei weiterhin $e > 0$ beliebig und

$$N_e = \left\{ l \in \mathbb{N} \mid \exists x \in D : \left| y_{z_l}(x) - y(x) \right| \geq e \right\}.$$

Angenommen, die Menge $N_e \subseteq \mathbb{N}$ besitzt unendlich viele Elemente, dann kann man einen Teilfolge $\{z_{l_m}\}_{m\geq 1}$ von $\{z_l\}_{l\geq 1}$ mit $n_m \in N_e$ auswählen. Da nun die Folge $\{y_{z_{l_m}}\}_{m\geq 1}$ auf *D* beschränkt und gleichgradig stetig ist, ex. nach dem Satz von *Arzela-Ascoli* eine Teilfolge $\{z_{r_m}\}_{m\geq 1}$ von $\{z_l\}_{l\geq 1}$, so dass die Folge $\{y_{z_{r_m}}\}_{m\geq 1}$ auf *D* gleichmäßig gegen eine Funktion $\tilde{y}$ konvergiert.
Nach dem *Existenzsatz von Picard-Lindelöf* ist die Funktion $\tilde{y}$ eine Lösung des AWP. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt jetzt $\tilde{y} = y$. Daraus folgt, dass ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $m \geq k_0$ und für alle $x \in D$ gilt:

$$\left| y_{z_{r_m}}(x) - y(x) \right| < e .$$

Das ist aber ein Widerspruch zu obiger Annahme, d.h. N_e muss endlich sein.
Es gibt demzufolge ein $l_0 \in \mathbb{N}$, dass für $l \geq l_0$ und $\forall x \in D$ gilt:

$$\left| y_{z_l}(x) - y(x) \right| < e .$$

□

b)

Also versucht hab ich's....