Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 7

1.)

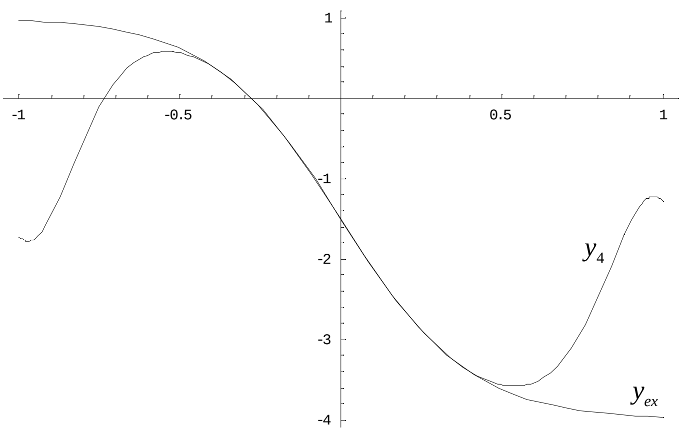
Sukzessive Approximation von $y' = y^2 + 3y - 4$ $\qquad y(0) = -\frac{3}{2}$

Iterationsformel: $y_{n+1} = -\frac{3}{2} + \int_0^x f\left(y_n(t)\right)dt \qquad y_0 = -\frac{3}{2} \qquad f\left(y_n(t)\right) = y_n(t)^2 + 3y_n(t) - 4$

$$y_1 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{25}{4}x$$
$$y_2 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{25}{4}x + \tfrac{625}{48}x^3$$
$$y_3 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{25}{4}x + \tfrac{625}{48}x^3 - \tfrac{3125}{96}x^5 + \tfrac{390625}{16128}x^7$$
$$y_4 = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{25}{4}x + \tfrac{625}{48}x^3 - \tfrac{3125}{96}x^5 + \tfrac{1328125}{16128}x^7 - \tfrac{37109375}{290304}x^9 + \tfrac{654296875}{4257792}x^{11} - \tfrac{1220703125}{10063872}x^{13} + \tfrac{30517578125}{780337152}x^{15}$$

Die exakte Lösung ist: $y_{ex} = -\dfrac{4e^{5x} - 1}{e^{5x} + 1}$.

Wie an der nachfolgenden "Skizze" zu erkennen ist, approximiert y_4 die exakte Lösung in einer Umgebung der 0 relativ gut:



2.)

Es ist ein arg komplizierter Hilfssatz aus der Vorlesung zu beweisen.

Sei $j:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig mit $j(x)>0$ für $x>0$ und

$$\lim_{e\to 0+0}\int_e^1 \frac{dt}{j(t)}=\infty \qquad (*)$$

Weiterhin $u:[0,a]\to\mathbb{R}$ stetig mit $u(x)\geq 0$ für $x\in[0,a]$, $u(0)=0$ und

$$|u(x)-u(\bar{x})|\leq\int_x^{\bar{x}} j(u(t))\,dt \quad \text{für } 0\leq x\leq\bar{x}\leq a$$

Es ist zu zeigen, dass $u=0$ in $[0,a]$.

Beweis:

Nach dem Hinweis definiere ich für kleine $e>0$ ein $y(e,x)$ durch

$$2x=\int_e^{y(e,x)}\frac{dt}{j(t)} \qquad (**)$$

(**) differenzieren nach oberer Grenze:

$$2=\frac{y'(e,x)}{j(y(e,x))} \qquad y'(e,x)=2j(y(e,x))$$

Integration ergibt dann

$$\int_x^{\bar{x}} j(y(e,t))\,dt=\tfrac{1}{2}\int_x^{\bar{x}} y'(e,t)\,dt=\frac{y(e,\bar{x})-y(e,x)}{2},$$

folglich $y(e,\bar{x})-y(e,x)=2\int_x^{\bar{x}} j(y(e,t))\,dt$.

Da $u(x)\leq\int_0^x j(u(t))\,dt$, definiere ich

$$h_u(x)=\int_0^x j(u(t))\,dt \qquad h_y(x)=\int_0^x j(y(e,t))\,dt$$

Dann kann man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden:

Es gilt $h_u'(x)=j(u(x))$ $\qquad h_y'(x)=2j(y(e,x))$

und $h_u'(0)=j(u(0))=0$ $\qquad h_y'(0)=2j(y(e,0))$

$$=2j(e)>0$$

da $0=\int_e^{y(e,0)}\underbrace{\frac{dt}{j(t)}}_{\neq 0}$ ist $y(e,0)=e$, $(e>0)$

Da weiterhin $h_u(0)=0$ $h_y(0)=0$
folgt aus dem Mittelwertsatz nun $h_u(x)<h_y(x)$, *x*>0 da beide bei 0 den gleichen Funktionswert (=0), aber der Anstieg von $h_y(x)$ in einer Umgebung von 0 größer als der von $h_u(x)$ (=0) in 0<*x*<*a* ist.

Das heißt: $u(x)<h_y(x)=y(e,x)+e$ (***)

Aus (*) und (**) folgt aber: $\forall x\in[0,a]: y(e,x)\to 0$ falls $e\to 0$

In (***) folgt mit $e\to 0$ schließlich $u(x)=0 \quad \forall x\in[0,a]$

□

3.)

a)

$$y' = e^{-x}y^2 + y + e^x$$

Ich errate eine Lösung: $y_1 = e^x \tan x$ (das sticht einem ja direkt ins Auge....)

Nach Ricatti ist nun die Substitution $y = e^x \tan x + v$ durchzuführen.
Also $y' = e^x \tan x + e^x + e^x \tan^2 x + v'$

Folglich:

$$e^x \tan x + e^x + e^x \tan^2 x + v' = e^{-x}\left(e^x \tan x + v\right)^2 + e^x \tan x + v + e^x$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{e^{2x}\tan^2 x + 2e^x v \tan x + v^2}{e^x} + e^x \tan x + v + e^x \\ &= 2v\tan x + \frac{v^2}{e^x} + v \\ &= \underline{v(2\tan x + 1) + \frac{v^2}{e^x}} \end{aligned}$$

...und wir haben eine Bernoulli-DG.

Diese kann nun wieder durch Subst. $z = \frac{1}{v}$ gelöst werden und es ergibt sich als Lösung:

$$v = \frac{e^x}{\cos x\left(c\cos x - \sin x\right)}$$

Resubstitution:

$$y = e^x \tan x + \frac{e^x}{\cos x\left(c\cos x - \sin x\right)}$$
$$= \frac{e^x \sin x\left(c\cos x - \sin x\right) - e^x}{\cos x\left(c\cos x - \sin x\right)}$$
$$= \frac{e^x\left(c\sin x\cos x - \sin^2 x + 1\right)}{\cos x\left(c\cos x - \sin x\right)}$$
$$= \frac{e^x c\sin x\cos x + e^x \cos^2 x}{\cos x\left(c\cos x - \sin x\right)}$$
$$= \underline{\underline{\frac{e^x c\sin x + e^x \cos x}{c\cos x - \sin x}}}$$

b)

$$y' = x^3 y^2 + \frac{y}{x} - x^5$$

Erratene Lösung: $y_1 = x$

Subst. :

$$y = x + v$$
$$y' = 1 + v'$$

$$1 + v' = x^3\left(x^2 + 2vx + v^2\right) + \frac{x+v}{x} - x^5$$
$$1 + v' = x^5 + 2vx^4 + v^2x^3 + 1 + \frac{v}{x} - x^5$$
$$v' = x^3v^2 + v\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right)$$

...wieder Bernoulli-DG, und deren Lösung ist:

$$v = 2x\left(\frac{c}{-e^{\frac{2x^5}{5}} + c} - 1\right)$$

Resubstitution:

$$y = x + v$$
$$= \underline{\underline{x\left(\frac{2c}{-e^{\frac{2x^5}{5}} + c} - 1\right)}}$$

4.)

Zu zeigen:
$y_i \ (i=1...4)$ seien Lösungen einer Ricattischen DG in *(a,b)*, dann ist ihr Doppelverhältnis in *(a,b)* konstant, d.h. $\frac{y_1(x)-y_3(x)}{y_1(x)-y_4(x)} \cdot \frac{y_2(x)-y_4(x)}{y_2(x)-y_3(x)} = \text{const}$

Ich benutze zum Beweis den Satz aus Aufgabe 3a) der Serie 6:

Wenn $z = z(x)$ Lösung einer Ricattischen DG, dann ist $y = y(x) \neq z(x)$ auch Lösung, falls $u = \frac{1}{y-z}$ Lösung der DG $u' + 2zu + 1 = 0$.

Beweis:

Es sei *z* eine Lösung, dann gilt für unser *u* die Darstellung $u = u_0 + cu_1$ (u_1 Lsg. hom. DG, u_0 spez. Lsg. inhom. DG).
Also $y = z + \frac{1}{u} = z + \frac{1}{u_0 + cu_1}$.

Ich setze nun $z = y_4$ und bezeichne die Konstanten in $y_1 ... y_3$ mit $c_1 ... c_3$. Dann gilt:

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} = \frac{\frac{1}{u_0 + c_1 u_1} - \frac{1}{u_0 + c_3 u_1}}{\frac{1}{u_0 + c_1 u_1}} = \frac{c_3 u_1 - c_1 u_1}{u_0 + c_3 u_1}$$

$$\frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_3} = \frac{\frac{1}{u_0 + c_2 u_1}}{\frac{1}{u_0 + c_2 u_1} - \frac{1}{u_0 + c_3 u_1}} = \frac{u_0 + c_3 u_1}{c_3 u_1 - c_2 u_1}$$

Es folgt:

$$DV(y_1, ..., y_4) = \underline{\underline{\frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} = \text{const}}}$$

□