# Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
# Serie 6

**1.)**

Ich berechne zunächst die Fließgeschwindigkeit des Bandes an einer bel. Stelle $x$ $(0 < x < L)$:

$v_f = \frac{x}{l(t)} v_1$ wobei $l(t) = L + v_1 t$ die Länge des Bandes ist.

also $v_f = \frac{x v_1}{L + v_1 t}$

Die Geschw. des Käfers ist: $v = v_2 + v_f = v_2 + \frac{x v_1}{L + v_1 t}$

Es folgt die DG: $x'(t) = \frac{dx}{dt} = v_2 + \frac{x v_1}{L + v_1 t}$ mit AB: $x'(0) = v_2$

Lösung durch Differentiation:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v_1 \frac{x'(L + v_1 t) - x v_1}{(L + v_1 t)^2} = v_1 \frac{\left(v_2 + \frac{x v_1}{L + v_1 t}\right)(L + v_1 t) - x v_1}{(L + v_1 t)^2}$$

$$= \frac{v_1 v_2}{L + v_1 t}$$

daraus folgt:

$$\frac{dx}{dt} = v_2 \ln(L + v_1 t) + c \qquad \text{mit AB } v_2 \ln L + c = v_2$$

$$= v_2 \left(1 + \ln\left(1 + \frac{v_1}{L} t\right)\right)$$

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ (am Ziel) gilt: $x'(t_1) = v_1 + v_2$

somit:

$$v_2 \left(1 + \ln\left(1 + \frac{v_1}{L} t_1\right)\right) = v_1 + v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \ln\left(1 + \frac{v_1}{L} t_1\right) \qquad e^{\frac{v_1}{v_2}} = 1 + \frac{v_1}{L} t_1$$

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{L}{v_1}\left(e^{\frac{v_1}{v_2}} - 1\right)}}$$

Das heißt, der Käfer erreicht immer sein Ziel (solange $v_2 > 0$).

**2.)**

**a)**

$$z = f_0 y + g$$

$$y = \frac{z-g}{f_0} \qquad y' = \frac{(z'-g')\,f_0 - (z-g)\,f_0}{f_0^2}$$

$$\frac{z'\,f_0 - g'\,f_0 - zf_0' + gf_0'}{f_0^2} = f_0\left(\frac{z-g}{f_0}\right)^2 + f_1\frac{z-g}{f_0} + f_2$$

$$z'\,f_0 - g'\,f_0 - zf_0' + gf_0' = f_0\,(z-g)^2 + f_1 f_0\,(z-g) + f_2 f_0^2$$

$$= f_0\left(z^2 - 2zg + g^2\right) + f_1 f_0 z - f_1 f_0 g + f_2 f_0^2$$

$$z'\,f_0 = f_0 z^2 - 2 f_0 zg + f_0 g^2 + f_1 f_0 z - f_1 f_2 g + f_2 f_0^2 + g'\,f_0 + zf_0' - gf_0'$$

$$z' = z^2 + z\left(-2g + f_1 + \frac{f_0'}{f_0}\right) + g^2 - f_1 g + f_2 f_0 + g' - g\frac{f_0'}{f_0}$$

...der Koeffizient bei *z* muss nun 0 werden:

$$2g = f_1 + \frac{f_0'}{f_0}$$

$$\underline{\underline{g = \frac{f_1}{2} + \frac{f_0'}{2 f_0}}}$$

also ist

$$z' = z^2 + g^2 - f_1 g + f_2 f_0 + g' - g\frac{f_0'}{f_0} \qquad \text{weiterhin } g' = \frac{f_1'}{2} + \frac{f_0'' f_0 - (f_0')^2}{2 f_0^2}$$

folglich

$$\vdots$$

$$z' = z^2 - \frac{f_1^2}{4} - \frac{3(f_0')^2}{4 f_0^2} + f_2 f_0 + \frac{f_1'}{2} + \frac{f_0''}{2 f_0} - \frac{f_1 f_0'}{2 f_0} \qquad (*)$$

$$\to f = \underline{\underline{\frac{f_1^2}{4} + \frac{3(f_0')^2}{4 f_0^2} - f_2 f_0 - \frac{f_1'}{2} - \frac{f_0''}{2 f_0} + \frac{f_1 f_0'}{2 f_0}}}$$

**b)**

Hier sind:

$$f_0 = 1 \qquad f_1 = -2x - 1 \qquad f_2 = 1 + x + x^2$$

Also $g = -x - \frac{1}{2} \qquad g' = -1$

Einsetzen in (*):

$$z' = z^2 - \frac{4x^2 + 4x + 1}{4} + 1 + x + x^2 - 1$$

$$= z^2 - x^2 - x - \frac{1}{4} + x + x^2 = \underline{\underline{z^2 - \frac{1}{4}}}$$

**3.)**

**a)**

$z(x)$ ist Lösung von $z' = z^2 - f(x)$

Zu zeigen: dann ist $y(x) \neq z(x)$ auch Lösung wenn $u = \frac{1}{y-z}$ erfüllt $u' = 2zu + 1 = 0$

Beweis:

$y = z + \frac{1}{u}$ $\qquad y' = z' - \frac{u'}{u^2}$

es soll nun aber auch $y(x)$ Lösung sein, d.h. $y' = y^2 - f(x)$ (ok, falsche Richtung....ist mir jetzt aber auch egal)

$$\underline{z'} - \frac{u'}{u^2} = \underline{z^2} + 2\frac{z}{u} + \frac{1}{u^2} \underline{- f(x)}$$

Da die unterstrichenen Terme nach Vorr. Lösung sind, folgt:

$$-u' = 2zu + 1$$
$$u' + 2zu + 1 = 0$$

$\square$

**b)**

Lösen der DG $z' = z^2 - \frac{1}{4}$:

$$\frac{z'}{z^2 - \frac{1}{4}} = 1$$

$$\frac{z'}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z+\frac{1}{2}} = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\ln \frac{z-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}} = x + c_1$$

$$\frac{z-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}} = e^x c$$

$$z = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}ce^x}{1 - ce^x}$$

Dann wie in a) nach *u* transf. und DG $u' = 2zu + 1 = 0$ lösen und wieder nach *y* auflösen.

Das ergibt schließlich:

$$y = \frac{1}{\underline{\underline{1 - e^x c}}} + x$$

**4.)**

$$\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}} = 6x$$

$$y^{\frac{1}{3}} = 3x^2 + c$$

$$y = \left(3x^2 + c\right)^3$$

$$3x + c = 0$$

$$0 = \left(3x_0^2 + c\right)^3 \qquad -3x_0^2 = -c$$

daraus folgt:

$$y_1 = 3\left(x^2 - x_0^2\right)^3 \qquad y_2 = 0$$

D.h. das AWP ist nicht eindeutig lösbar.