Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 4

1.)

Differentialgleichung für Bierausfluss:

Die gesuchte Funktion ist die Höhe *h* des Bieres in Abhängigkeit der Zeit *t*.
Die Ausflussgeschwindigkeit *v* wird dabei mit *h* kleiner. Die Wassermenge *–dV*, die innerhalb des Zeitintervalls zw. *t* und *t+dt* durch den Zapfhahn (Grundfläche *a*) ausläuft, füllt einen Zylinder der Grundfläche *a* und der Höhe *vdt*.
Folglich: $-dV = -avdt = -a\sqrt{2Gh}dt$ (1)

Gleichzeitig fehlt dieses Volumen im Zylinder, d.h. dessen Differential ist:

$$-dV = \pi r^2 dh$$

Also mit (1):

$$-a\sqrt{2Gh}dt = \pi r^2 dh$$

$$\underline{\underline{h' = \frac{-a\sqrt{2Gh}}{\pi r^2}}}$$

Analog im Kegelstumpf:

$$-dV = \tfrac{1}{3}\pi\left(r^2 + R^2 + rR\right)dh$$

$$\underline{\underline{h' = \frac{a\sqrt{2Gh}}{\tfrac{1}{3}\pi\left(r^2 + R^2 + rR\right)}}}$$

Lösung der beiden DG:

Zylinder:

$$\int \frac{h'}{\sqrt{h}}dt = -\int \frac{a\sqrt{2G}}{\pi r^2}dt$$

$$2\sqrt{h} = -\frac{a\sqrt{2G}}{\pi r^2}t$$

$$h = \frac{a^2 G}{2\pi^2 r^4}t^2$$

Resubstitution des Volumens:

$$V = \pi r^2 h \qquad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

$$h = \frac{a^2 G \pi^2 h^2 t}{2\pi^2 V^2} = \frac{a^2 G h^2 t}{2V^2} = \frac{2V}{a^2 G t}$$

$$t = \frac{2V}{a^2 G h}$$

Kegelstumpf:

$\vdots$

$$h = \frac{a^2 G}{\frac{2}{9}\pi^2\left(r^2 + R^2 + rR\right)} t^2$$

wieder Resubstitution des Volumens:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(r^2 + R^2 + rR\right) \qquad \left(r^2 + R^2 + rR\right) = \frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}$$

$$h = \ldots = \frac{2V}{a^2 G t}$$

$$t = \frac{2V}{a^2 G h}$$

Die Zeit t ist bei beiden Gefäßen gleich. Das ist auch klar wenn sich die DG nur durch die Formel des Volumens unterscheiden und dann das Volumen wieder resubstituiert wird. Daraus lässt sich ein Leerlaufen der beiden Gefäße in derselben Zeit folgern.

2.)

$$y' = \frac{x\left(1 - y^2 - x^2\right)}{y\left(1 + y^2 + x^2\right)}$$

DG ist exakt, da:

$$Pdx + Qdy = \left(-x + xy^2 + x^3\right)dx + \left(y + y^3 + x^2 y\right)dy = 0$$

$$P_y = 2yx$$

$$Q_x = 2xy \qquad \rightarrow P_y = Q_x$$

Lösung mit Kurvenintegral 2. Art:

(zur Variablentransformation siehe 4b)

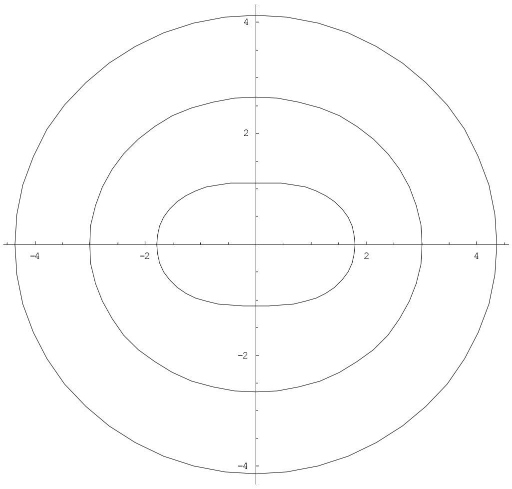
$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s, y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(-s + s y_0^2 + s^3\right)ds + \int_{y_0}^{y} \left(s + s^3 + x^2 s\right)ds$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}s^2 y_0^2 + \tfrac{1}{4}s^4\right]_{x_0}^{x} + \left[\tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{4}s^4 + \tfrac{1}{2}x^2 s^2\right]_{y_0}^{y}$$

$$\underline{\underline{= -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x_0^2 - \tfrac{1}{2}x_0^2 y_0^2 - \tfrac{1}{4}x_0^4 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{2}x^2 y^2 - \tfrac{1}{2}y_0^2 - \tfrac{1}{4}y_0^4 = 0}}$$

Skizze von drei Lösungskurven mit (x_0, y_0) jeweils $(1,1),(2,2),(3,3)$:



3.)

$$y' = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2}$$

Eulerschen Multiplikator durch Ansatz $x^\alpha y^\beta$ bestimmen:

$$x^\alpha y^\beta \left(y^2 - xy\right)dx + x^\alpha y^\beta \left(2xy^3 + xy + x^2\right)dy = F(x,y) = 0$$

$$F_x = \left(y^2 - xy\right)x^\alpha y^\beta \qquad F_y = \left(2xy^3 + xy + x^2\right)x^\alpha y^\beta$$

$$F_{xy} = (2y - x)x^\alpha y^\beta + \left(y^2 - xy\right)\beta x^\alpha y^{\beta-1}$$

$$F_{yx} = \left(2y^3 + y + 2x\right)x^\alpha y^\beta + \left(2xy^3 + xy + x^2\right)\alpha x^{\alpha-1} y^\beta$$

$$2y - x + \frac{\beta\left(y^2 - xy\right)}{y} \overset{?}{=} 2y^3 + y + 2x + \frac{\alpha\left(2xy^3 + xy + x^2\right)}{x}$$

$$2y - x + \beta y - \beta x = 2y^3 + y + 2x + 2\alpha y^3 + \alpha y + \alpha x$$

$$\alpha = -1: \quad 2y - x + \beta y - \beta x = y + 2x - y - x$$

$$y(2+\beta) = x(2+\beta)$$

$$\rightarrow \beta = -2$$

$$\lambda(x,y) = \underline{\underline{x^{-1}y^{-2}}}$$

Lösung der DG:

$$F(x,y) = Pdx + Qdy = \lambda\left(y^2 - xy\right)dx + \lambda\left(2xy^3 + xy + x^2\right)dy$$

mit Kurvenintegral 2. Art:

(zur Variablentransformation siehe 4b)

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{y_0}\right) ds + \int_{y_0}^{y} \left(2s + \tfrac{1}{s} + \tfrac{x}{s^2}\right) ds$$

$$\vdots$$

$$= \underline{\underline{-\tfrac{x}{y} + y^2 + \ln x + \ln y + c}}$$

4.)

a)

Eulerscher Multiplikator für $y' + f(x)y = g(x)$.

Ansatz: $\lambda = \lambda(x)$

$$F_x = \left(f(x)y - g(x)\right)\lambda(x) \qquad F_y = \lambda(x)$$

$$F_{xy} = F(x)\lambda(x) = F_{yx} = \lambda'(x)$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = f(x)$$

$$\ln\left|\lambda(x)\right| = \int f(t)\,dt + c$$

$$\lambda(x) = \underline{\underline{ce^{\int f(t)dt}}} \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda(x) = \underline{\underline{ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}}}$$

b)

Lösung mit Kurvenintegral 2. Art:

$$F(x,y)=\int_l \left(f(x)y-g(x)\right)ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}dx+ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}dy$$

Variablentransformation in Parameterdarst.:

$$l:\quad (I)\ \ x=t \qquad dx=dt \qquad (II)\ \ x=x \qquad dx=0$$
$$y=y_0 \qquad dy=0 \qquad\qquad y=t \qquad dy=dt$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(f(t)y_0-g(t)\right)ce^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt+c\int_{y_0}^{y}e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}dt$$

$$=y_0c\int_{x_0}^{x}f(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt-c\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt+ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(y-y_0\right)$$

$$=y_0c\left[e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}\right]_{x_0}^{x}-c\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt+ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(y-y_0\right)$$

$$=y_0ce^{\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau}-y_0c-c\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt+cye^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}-cy_0e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}=0$$

$$cye^{\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau}=y_0c+c\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt$$

und schließlich:

$$y(x)=\underline{\underline{e^{-\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(\tau)d\tau}dt\right)}}$$