Thorsten Berger 8976939
Dipl. Informatik

Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 14

1.)

Zu bestimmen ist die $2p$ -periodische Lösung der DG $y''+4y=g(x)$ mit

$$g(x)=\begin{cases} \frac{x}{p} & \text{für } 0\le x\le p \\ 2-\frac{x}{p} & \text{für } p\le x\le 2p \end{cases}$$

Ich löse zunächst die homogene DG $y''+4y=0$:

$$l^2+4=0$$

$$l=\sqrt{-4} \qquad l_{1/2}=\pm 2i$$

partielle Lösungen: $y_1=\cos 2x,\ y_2=\sin 2x$

Allgemeine homogene Lösung $\underline{y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x}$

Als nächstes würde man die eine spezielle inhomogene Lösung bestimmen und dann einen Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Entwicklung der Funktion $g(x)$ durchführen.

Tja, und nachdem ich die aufgestellt hatte:

$$g(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2},$$

musste ich feststellen, dass der Koeffizientenvergleich hier nicht funktioniert.

Das liegt daran, dass die Nichtresonanzbedingung aus der Vorlesung (Satz 34) nicht zutrifft:

$l=2p$ (Periodizität von $g(x)$)

Es muss gelten $l^2 b+2a\,2p\,inl-4p^2n^2\neq 0 \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$

für eine DG der Form $y''+2ay'+b=g(x)$.

Aber gerade für $n=2$ ist der Ausdruck 0, d.h. es tritt ein Resonanzfall auf. Folglich ist die Lösungs-Reihe divergent. Mal wieder 'ne falsche Aufgabenstellung?

2.)

Beweis, dass sich eine *Eulersche Differentialgleichung*

$$a_n x^n y^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1 xy'+a_0 y=0$$

durch Substitution $x=e^t$ auf eine lineare DG mit konstanten Koeffizienten zurückführen lässt.

Also, wir substituieren $x=e^t,\ z(t)=y(e^t),\ y(x)=z(\ln x)$.

Das führt mit

$$\frac{dz}{dt}=y'x \qquad\Leftrightarrow\qquad xy'=\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=y'x+y''x^2 \qquad\Leftrightarrow\qquad x^2y''=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^3z}{dt^3}=y'x+3y''x^2+y'''x^3 \qquad\Leftrightarrow\qquad x^3y'''=\frac{d^3z}{dt^3}-3\frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}$$

...usw. (die Summanden $x^i y^{(i)}$ werden bei der Substitution durch Ableitungen von z mit konstanten Koeffizienten ersetzt), wie man leicht sehen kann auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$b_n \frac{d^n z}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 u = 0$$

□

3.)

a) $x^3 y''' + xy' - y = 3x^4$

Substitution $x = e^t, t = \ln x, z(t) = y(e^t)$:

$$z'(t) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'x$$

$$z''(t) = \frac{d^2 y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dt^2} = y'' x^2 + y' x$$

$$z'''(t) = \frac{d^3 y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dx}{td}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^3 x}{dt^3} = y''' x^3 + 3y'' x^2 + y' x$$

Das in die Ausgangsgleichung eingesetzt und vereinfacht ergibt:

$$z''' - 3z'' + 3z' - z = 3e^{4t}$$

Lösung der homogenen DG:

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 1 = 0$$

$$l_{1/2/3} = 1$$

mit den partiellen Lösungen $z_1 = e^t$, $z_2 = te^t$, $z_3 = t^2 e^t$

$$z_h = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

Zur Lösung der inhomogenen DG verwende ich einen speziellen Ansatz

$$z_s(x) = ae^{mt} = ae^{4t}$$

$$z_s'(x) = 4ae^{4t}$$

$$z_s''(x) = 16ae^{4t}$$

$$z_s'''(x) = 64ae^{4t}$$

also

$$64ae^{4t} - 48ae^{4t} + 12ae^{4t} - ae^{4t} = 3e^{4t}$$

$$9ae^{4t} = e^{4t}$$

$$a = \frac{1}{9}$$

$$z_s = \frac{1}{9} e^{4t}$$

allgemeine Lösung: $z = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \frac{1}{9} e^{4t}$

Und schließlich ergibt sich durch die Resubstitution die Lösung der Differentialgleichung:

$$\underline{\underline{y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x (\ln x)^2 + \frac{1}{9} x^4}}$$

b) $x^2 y'' - 7xy' + 15y = x$

Dieselbe Substitution $x = e^t, t = \ln x, z(t) = y(e^t)$:

$$z'(t) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'x$$
$$z''(t) = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} = y''x^2 + y'x$$

und Einsetzen in die DG ergibt sofort:

$$z'' - 8z' + 15z = e^t$$

Lösung der homogenen DG:
$$l^2 - 8l + 15 = 0$$
$$l_1 = 3,\ l_2 = 5$$
partielle Lösungen: $z_1 = e^{3t}$, $z_2 = e^{5t}$
$$z_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}$$
Lösung der inhomogenen DG wieder mit speziellem Ansatz:
$$z_s(x) = ae^{mt} = ae^t$$
$$z_s'(x) = ae^t$$
$$z_s''(x) = ae^t$$
also
$$ae^t - 8ae^t + 15ae^t = e^t$$
$$8a = 1$$
$$a = \tfrac{1}{8}$$
$$z = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} + \tfrac{1}{8} e^t$$

Resubstitution:
$$y = c_1 x^3 + c_2 x^5 + \tfrac{1}{8} x$$

Zu guter Letzt lassen sich noch die Konstanten für das AWP bestimmen:
$$y(1) = c_1 + c_2 + \tfrac{1}{8} = 0 \qquad c_2 = -c_1 - \tfrac{1}{8}$$
$$y'(1) = 3c_1 + 5c_2 + \tfrac{1}{8} = 0 \qquad -2c_1 - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$c_1 = -\tfrac{1}{4},\ c_2 = \tfrac{1}{8}$$

woraus die endgültige Lösung folgt:

$$\underline{\underline{y = -\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{8}x^5 + \tfrac{1}{8}x}}$$

4.)

Differentialgleichung für Geschwindigkeitsverteilung des Flusses in kreiszylindrischem Rohr (Radius *R*>0):
$$v''(r) + \tfrac{1}{r}v'(r) = -g$$

Zum Abkürzen des Lösungsweges verwende ich *Mathematica* zur Lösung dieser DG:
$$v = -\frac{g r^2}{4} + c_1 + c_2 \ln r$$

Jetzt gilt es die verwendeten Konstanten zu belegen. Die Geschwindigkeit im Mittelpunkt lässt sich hier wg. $\ln 0 \to -\infty$ nicht angeben, was aber eigtl. gelingen sollte. Ich setze deswegen $c_2 = 0$.
Andererseits muss die Geschwindigkeit am Rand gegen 0 konvergieren, d.h. $v(R) = 0$, woraus

$c_1 = -\frac{g\,R^2}{4}$ folgt. Sinnvoll wäre also folgende Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$v(r) = -\frac{g\,r^2}{4} + \frac{gR^2}{4} = \frac{g}{4}\left(R^2 - r^2\right)$$

Weiterhin war die Flüssigkeitsmenge gefragt, die pro Zeiteinheit durch das Rohr fließt.

$$V = \int_0^R 2p\,v(r)\,r\,dr$$

Integration mit *Mathematica* liefert:

$$\underline{\underline{V = \tfrac{1}{8} gp\,R^4}}$$