Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 13

1.)

a)
Bestimmung einer homogenen Differentialgleichung zu gegebenen Funktionen y_i (partikuläre Lösungen) eines Fundamentalsystems.

Seien, nach Aufgabenstellung die $y_i(x), i=1,...,n$ gegeben. so setzt sich die allgemeine Lösung folgendermaßen zusammen:

(*) $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \qquad c_1,...,c_n = \text{const}$$

Gesucht ist nun eine homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \ ,$$

deren Koeffizienten $a_1,...,a_n$ zu bestimmen sind.

Setzen wir nun die allg. Lösung (*) in diese DG ein:

$$\begin{aligned}
&c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + ... + c_n y_n^{(n)} \\
&+a_1 c_1 y_1^{(n-1)} + a_1 c_2 y_2^{(n-1)} + ... + a_1 c_n y_n^{(n-1)} \\
&\vdots \\
&+ a_n c_1 y_1 + a_n c_2 y_2 + ... + a_n c_n y_n \qquad = 0
\end{aligned}$$

In einer anderen Form sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
&c_1 \left(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_n y_1 \right) \\
&+c_2 \left(y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + ... + a_n y_2 \right) \\
&\vdots \\
&+c_n \left(y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + ... + a_n y_2 \right) = 0
\end{aligned}$$

Die Konstanten $c_1,...,c_n$ kann man hier beliebig wählen, da alle, in Ermangelung eines AWP, die DG erfüllen. Ich wähle hier zunächst $c_1 \neq 0, c_2,...,c_n = 0$, dann muss $y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_n y_1 = 0$ gelten. Das mache ich so für alle c_i , um genügend Gleichungen zur Bestimmung der a_i zu erhalten:

$$\begin{aligned}
&a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_n y_1 = -y_1^{(n)} \\
&\vdots \\
&a_1 y_1^{(n-1)} + ... + a_n y_n = -y_n^{(n)}
\end{aligned}$$

Wie wir alle wissen, ist so ein Gleichungssystem lösbar falls die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist. Man erkennt hier, dass diese der Wronski-Determinante entspricht.
Die Lösbarkeit des Gleichungssystems impliziert demzufolge die Möglichkeit, eine passende homogene Differentialgleichung aufzustellen.

b)

Differentialgleichung für $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$, $x > 0$.

Ich führe einfach die in a) beschriebenen Schritte aus.

allg. Lösung:

$$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x + c_3 x^2$$

$$y' = -\frac{c_1}{x^2} + c_2 + 2c_3 x$$

$$y'' = \frac{2c_1}{x^3} + 2c_3$$

$$y''' = -\frac{6c_1}{x^4}$$

Wir suchen nun diese DG:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

Einsetzen:

$$-\frac{6c_1}{x^4} + \frac{2a_1c_1}{x^3} + 2a_1c_3 - \frac{a_2c_1}{x^2} + a_2c_2 + 2c_3a_2x + \frac{a_3c_1}{x} + a_3c_2x + a_3c_3x^2 = 0$$

(die Zwischenschritte erspare ich mir hier mal...)

$$\begin{aligned} & c_1\left(-6 + 2a_1x - a_2x^2 + a_3x^3\right) \\ & + c_2\left(a_2x^4 + a_3x^5\right) \\ & + c_3\left(2a_1x^4 + 2a_2x^5 + a_3x^6\right) = 0 \end{aligned}$$

$$a_2x^4 + a_3x^5 = x^4\left(a_2 + a_3x\right) = 0$$

$$a_2 = -a_3x$$

$$-6 + 2a_1x + 2a_3x^3 = 0$$

$$2a_1x^4 - a_3x^6 = 0$$

$$2a_1x^4 = a_3x^6$$

$$2a_1 = a_3x^2$$

$$-6 + 3a_3x^3 = 0 \qquad 3a_3x^3 = 6,\ a_3x^3 = 2$$

Folglich $a_3 = \frac{2}{x^3}$, $a_2 = -\frac{2}{x^2}$, $a_1 = \frac{1}{x}$

und die DG lautet letztlich:

$$\underline{\underline{y''' + \tfrac{1}{x}y'' - \tfrac{2}{x^2}y' + \tfrac{2}{x^3}y = 0}}$$

2.)

entfällt wg. Zeitdruck... :(

3.)

a)

$$y'' + 2y' + y = 1 - x$$

Lösung der homogenen DG durch Lösen des charakteristischen Polynoms:

$$l^2 + 2l + 1 = 0$$
$$l_{1/2} = -1$$

Daraus ergeben sich die partikulären Lösungen $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ und wir haben die homogene Lösung

$$\underline{y_h = \frac{c_1}{e^x} + \frac{c_2 x}{e^x}}$$

Die Lösung der inhomogenen DG berechne ich mit der Variation der Konstanten.

Ansatz:

$$c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x) \qquad (*)$$
$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$y_{si} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \qquad (**)$$
$$y'_{si} = \underbrace{e^{-x} c_1' + e^{-x} x c_2'}_{=0} - e^{-x} c_1 + e^{-x} c_2 - e^{-x} c_2 x$$
$$= e^{-x}\left(-c_1 + c_2 - c_2 x\right)$$
$$y''_{si} = e^{-x}\left(c_1 - 2c_2 + c_2 x - c_1' + c_2' - c_2' x\right)$$

Die Ableitungen setze ich jetzt in die gesamte DG (mit Störterm) ein:

$$e^{-x}\left(c_1 - 2c_2 + c_2 x - c_1' + c_2' - c_2' x\right) + e^{-x}\left(-2c_1 + 2c_2 - 2c_2 x\right) + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = 1 - x$$
$$e^{-x}\left(-c_1' + c_2' - c_2' x\right) = 1 - x$$

Mit (*) gilt $c_1' = -c_2' x$, also:

$$c_2' = e^x\left(1 - x\right)$$
$$c_2 = e^x\left(2 - x\right) \qquad (c = 0)$$

Analog für c_1:

$$c_1' = e^x\left(x^2 - x\right)$$
$$c_1 = e^x\left(3 - 3x + x^2\right) \qquad (c = 0)$$

Einsetzen in (**) ergibt die gesuchte spezielle inhomogene Lösung:

$$y_{si} = 3 - 3x + x^2 + 2x - x^2$$
$$= \underline{3 - x}$$

Schließlich liefert die Addition der beiden die allgemeine Lösung:

$$\underline{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 3 - x}$$

Setzt man jetzt noch die Anfangsbedingungen ein, so kommt man auf $c_1 = 1, c_2 = 3$:

$$\underline{\underline{y = e^{-x} + 3xe^{-x} + 3 - x}}$$

b)

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 17y'' - 28y' + 20y = 0$$

Diese homogene DG wird, wie bei a) mit der Lösung des charakteristischen Polynoms berechnet:

$$l^4 - 6l^3 + 17l^2 - 28l + 20 = 0$$

Da es für Polynome ab 4. Grad keine allgemeinen Lösungsverfahren gibt, bleibt hier wohl nur der Rückgriff auf numerische Verfahren, oder auf *Mathematica*:

$$l_1 = 1 + 2i,\ l_2 = 1 - 2i,\ l_{3/4} = 2$$

Daraus folgen sofort die partikulären Lösungen:

$$y_1 = e^x \cos 2x,\ y_2 = e^x \sin 2x,\ y_3 = e^{2x},\ y_4 = xe^{2x}$$

sowie die allgemeine homogene Lösung:

$$\underline{\underline{y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}}}$$

4.)

Es ist eine Differentialgleichung $y'' = g(y)$ gegeben, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und weiterhin $sg(s) < 0$ für $s \neq 0$ gilt.

(*) $y'' = g(y)$, $\left| g(\tilde{y}) - g(\hat{y}) \right| \leq c \left| \tilde{y} - \hat{y} \right|$ (Lipschitz-Bedingung)

a)

Es soll gezeigt werden, dass die Lösung der DG auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar ist.

Mit $y(t)$ ist auch $y(t+c)$ Lösung von (*), da aus $y''(t) = g(y(t))$ folgt für $t = t_1 + c$:

$$\frac{d^2 y(t_1 + c)}{dt^2} = y''(t) = g(y(t)) = g(y(t_1 + c)).$$

Weiterhin ist mit $y(t)$ auch $y(-t)$ Lösung, da für $t = -t_1$ folgt

$$\frac{d^2 y(-t_1)}{dt_1^2} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = g(y(t)) = g(y(-t_1)).$$

Ich setze nun $y(x) = y_1(x)$ und $y'(x) = y_2(x)$, wodurch man mit (*) ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung erstellen kann:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= g(y_1(x)) \end{aligned} \qquad (**)$$

Dadurch erhalte ich eine Funktion $F(x,y)$ mit

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = F(x,y) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ g\left(y_1(x)\right) \end{pmatrix}$$

F ist lipschitzstetig, da

$$\left|F(x,\tilde{y}) - F(x,\hat{y})\right| = \sqrt{\left(\tilde{y}_2 - \hat{y}_2\right)^2 + \left(g(\tilde{y}_1) - g(\hat{y}_1)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\tilde{y}_2 - \hat{y}_2\right)^2 + c^2\left(\tilde{y}_1 - \hat{y}_2\right)^2} \le \tilde{c}\sqrt{\left(\tilde{y}_2 - \hat{y}_2\right)^2 + \left(\tilde{y}_1 - \hat{y}_2\right)^2} = \tilde{c}\left|\tilde{y} - \hat{y}\right|$$

wobei $\tilde{c} = \max(1,c)$.

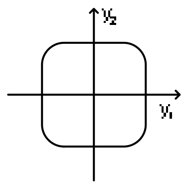
Unter den angegebenen Voraussetzungen existiert eine eindeutige Lösung des AWP im Intervall $[x, x+a]$, $a > 0$ und die Lösung ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöff bis zum Rand fortsetzbar.
Für $x = x + a$ sei $y(x+a) = y_a$. Es gelten weiterhin für $x \in [x+a, x+2a]$ die gleichen Bedingungen wie für $[x, x+a]$. Setzt man das fort, so existiert eine Lösung in $[x, \infty)$.
Mit $y = y(-t)$ folgt dann die Behauptung auch für $(-\infty, x]$, d.h. die Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar.

□

b)

Wenn $\int_0^s g(t)\,dt \to -\infty$ für $s \to \pm\infty$, dann ist jede Lösung periodisch.

Es gelingt mir hier nur, eine Beweisskizze, die auf dem Räuber-Beute-Modell aufbaut zu betrachten:
Seien wieder $y = y_1,\ y_1' = y_2,\ y_2' = g(y_1)$ und $sg(s) < 0,\ s \ne 0$.



Ich betrachte folgende Fälle, wobei ich als Ursprung den 1. Quadranten wähle und in der angegebenen Reihenfolge die Funktion verfolge:
- $y_2 > 0$, dann ist y_1 monoton wachsend.
- $y_1 > 0$, dann ist $g(s) < 0$ und y_2 monton fallend
- $y_2 > 0$, dann ist y_1 monoton fallend
- $y_2 < 0$, dann ist y_1 monoton fallend
- $y_1 < 0$, dann ist $g(s) > 0$ und y_2 monton wachsend

Hier kann man zu der Vermutung gelangen, dass die Funktion wieder den Ursprungspunkt im 1. Quadranten erreicht und dann der Verlauf erneut derselbe ist...