Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 12

1.)

Beweis, dass wenn A nilpotente, quadrat. Matrix mit $A^{l+1}=0$, dann:

$$E-A=\exp\left(-A-\tfrac{A^2}{2}-\tfrac{A^3}{3}-\ldots-\tfrac{A^l}{l}\right).$$

Der „Trick“ im Beweis besteht darin, A durch $At,\ t\in\mathbb{R}$ zu ersetzen. Wir erhalten dann eine Funktion *f(t)*:

$$f(t)=\exp\left(-At-\tfrac{A^2t^2}{2}-\tfrac{A^3t^3}{3}-\ldots-\tfrac{A^lt^l}{l}\right)$$

Die kann ganz normal abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} f'(t)&=\left(-A-A^2t-A^3t^2-\ldots-A^lt^{l-1}\right)\cdot\exp\left(-At-\tfrac{A^2t^2}{2}-\tfrac{A^3t^3}{3}-\ldots-\tfrac{A^lt^l}{l}\right)\\ &=-A\left(E+At+A^2t^2+\ldots+A^{l-1}t^{l-1}\right)\cdot\exp\left(-At-\tfrac{A^2t^2}{2}-\tfrac{A^3t^3}{3}-\ldots-\tfrac{A^lt^l}{l}\right) \qquad (*)\end{aligned}$$

Der Klammerausdruck erinnert an die Neumannsche Reihe

$$(E-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$$

In unserem Fall ist A nilpotent und die Summe daher endlich:

$$(E-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n=\sum_{n=0}^{l}A^n=E+A+\ldots+A^{l-1}+A^l$$

Die Endlichkeit impliziert wiederum, dass diese Summenformel auch für $|A|\geq 1$ (beliebige Matrix-Norm) gilt. Analog für At ist

$$(E-At)^{-1}=E+At+\ldots+t^{l-1}A^{l-1}+t^lA^l$$

Mit (*) ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(t)&=-A\left((E-At)^{-1}-t^lA^l\right)\cdot\exp\left(-At-\tfrac{A^2t^2}{2}-\tfrac{A^3t^3}{3}-\ldots-\tfrac{A^lt^l}{l}\right)\\ &=-A(E-At)^{-1}\cdot\exp\left(-At-\tfrac{A^2t^2}{2}-\tfrac{A^3t^3}{3}-\ldots-\tfrac{A^lt^l}{l}\right)\end{aligned}$$

(man beachte $t^lA^{l+1}=0$)

Also folglich:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=-A(E-At)^{-1}$$

$$\ln|f(t)|=\ln|E-At|+c$$

$$f(t)=\tilde{c}(E-At)$$

hier folgt aus $f(0)=E$ sofort $\tilde{c}=1$

und wir haben $\underline{f(t)=E-At}$, woraus für $t=1$ sofort die Behauptung folgt.

□

2.)

Es ist eine Matrix Λ mit $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^{\Lambda}$ zu bestimmen.

Ich führe eine Hauptachsentransformation durch:
Dazu sind zunächst die Eigenwerte/-vektoren von $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen:

Diese sind $l_1 = -1,\ l_2 = 3$ mit den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir können also die Matrix folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{C}$$

Es gilt $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^{B}C$ falls $\det C \neq 0$. Konkret heißt das:

$$\begin{aligned} e^{C^{-1}BC} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{B} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{b_1} & 0 \\ 0 & e^{b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Bestimmung von B ist einfach:

$$e^{b_1} = -1 \qquad b_1 = \ln(-1)$$
$$e^{b_2} = 3 \qquad b_2 = \ln 3$$
$$B = \begin{pmatrix} \ln(-1) & 0 \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix}$$

Also kann man jetzt Λ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = C^{-1}BC$$
$$C\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(-1) & 0 \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\ln(-1) & \frac{1}{2}\ln(-1) \\ \frac{1}{4}\ln 3 & \frac{1}{2}\ln 3 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{4} l_{11} + \tfrac{1}{2} l_{21} &= -\tfrac{1}{4}\ln(-1) \\ \tfrac{1}{4} l_{11} + \tfrac{1}{2} l_{21} &= \tfrac{1}{4}\ln 3 \\ -\tfrac{1}{4} l_{12} + \tfrac{1}{2} l_{22} &= \tfrac{1}{2}\ln(-1) \\ \tfrac{1}{4} l_{12} + \tfrac{1}{2} l_{22} &= \tfrac{1}{2}\ln 3 \end{aligned}$$

Die Lösung des GS ergibt dann sofort die gesuchte Matrix:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln(-1) & \ln 3 - \ln(-1) \\ -\frac{1}{4}\ln(-1) + \frac{1}{4}\ln 3 & \frac{1}{2}\ln(-1) + \frac{1}{2}\ln 3 \end{pmatrix}$$

Schreibt man noch für $\ln(-1) = ip$, so hat man:

$$\underline{\underline{\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}ip & \ln 3 - ip \\ -\frac{1}{4}ip + \frac{1}{4}\ln 3 & \frac{1}{2}ip + \frac{1}{2}\ln 3 \end{pmatrix}}}$$

3.)

Es ist zu zeigen, dass eine reelle quadrat. Matrix *A* schiefsymmetrisch ist, wenn alle Lösungen $y=y(x)$ des Differentialgleichungssystems $y'=Ay$ einen konstanten euklidischen Betrag haben.

Sei $y = e^{Ax}z$ eine Lösung des DGS $y' = Ay$.

Das heißt $y = e^{Ax}z = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(Ax)^n$.

Ich transponiere die gesamte Gleichung:

$$y^{\mathsf{T}} = z^{\mathsf{T}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(A^{\mathsf{T}}x\right)^n = z^{\mathsf{T}}e^{A^{\mathsf{T}}x},$$

multipliziere mit y und mit Hilfe von $A = -A^{\mathsf{T}}$ ergibt sich bereits der Beweis:

$$y^{\mathsf{T}}y = z^{\mathsf{T}}e^{A^{\mathsf{T}}x}e^{Ax}z = z^{\mathsf{T}}e^{\left(A^{\mathsf{T}}+A\right)x}z = z^{\mathsf{T}}e^{\left(A^{\mathsf{T}}-A^{\mathsf{T}}\right)x}z = \underline{\underline{z^{\mathsf{T}}z = \text{const.}}}$$

□

4.)

Gesucht ist ein Fundamentalsystem für

$$\left(2x-3x^3\right)y''+4y'+6xy = 0.$$

Gemäß dem Hinweis setze ich $y = x^a$ an:

$$y' = ax^{a-1},\; y'' = a(a-1)x^{a-2}$$

$$\left(2x-3x^3\right)a(a-1)x^{a-2} + 4ax^{a-1} + 6x^{a+1} = 0$$

$$2a(a-1)x^{a-1} - 3a(a-1)x^{a+1} + 4ax^{a-1} + 6x^{a+1} = 0$$

$$\left(2a^2+2a\right)x^{a-1} + \left(-3a^2+3a+6\right) = 0$$

$$a^2 + a = 0$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 2a+2 = 0 \qquad \underline{a = -1}$$

Die erste Lösung lautet also $\underline{y_1 = \frac{1}{x}}$.

Mit dem „Satz von der Erniedrigung der Ordnung“ kann man die zweite Lösung ausrechnen:

Die Substitution $u = \dfrac{y}{y_1} = yx$, $\quad y = \dfrac{u}{x}$, $\quad y' = \dfrac{u'x-u}{x^2}$, $y'' = \dfrac{u''}{x} - \dfrac{2(xu'-u)}{x^3}$

führt auf

$$6xu' + \left(2-3x^2\right)u'' = 0,$$

in der nur Ableitungen von u vorkommen, also kann man wieder substituieren $v = u'$ und erhält eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$6xv + (2-3x)v' = 0$$

Nach Mathematica ist deren Lösung $v = \left(3x^2 - 2\right)c$.

Zweimal resubstituieren

$$u = \int v dx = cx^3 - 2cx + \tilde{c}$$

$$y = \tfrac{u}{x} = cx^2 - 2c + \tfrac{\tilde{c}}{x}$$

$$y = x^2 - 2 \qquad \left(c = 1,\ \tilde{c} = 0\right)$$

und schon haben wir ein Fundamentalsystem von Lösungen:

$$\underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{x},\ x^2 - 2\right\}}}$$