

Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen Serie 11

1.)

Fundamentalsysteme bestimmen:

a)

$$\begin{aligned}y_1' &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + y_2\end{aligned}$$

Eigenwerte:

$$\begin{aligned}|A - \lambda E| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \\ \lambda_{1/2} &= 2 \pm i\end{aligned}$$

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2 + i:$$

$$\begin{pmatrix} 1 - i & 2 \\ -1 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ich wähle $y_1 = 1$, dann ergibt sich der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 2 - i:$$

$$\begin{pmatrix} 1 + i & 2 \\ -1 & -1 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Und hier folgt aus $y_1 = 1$ der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$.

Das daraus resultierende Fundamentalsystem ist schließlich

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix} e^{(2+i)x}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix} e^{(2-i)x} \right\}}}$$

b)

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' &= 2y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= 3y_1 - 6y_2 + 3y_3\end{aligned}$$

Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 1-I & -2 & 1 \\ 2 & -4-I & 2 \\ 3 & -6 & 3-I \end{vmatrix} = (1-I)(-4-I)(3-I) - 12 - 12 - 3(-4-I) + 12(1-I) + 4(3-I) \\ = \dots = -I^3 = 0$$

...also haben wir $I = 0$ mit der algebraischen Vielfachheit 3.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Es passt der Eigenvektor $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die anderen beiden Hauptvektoren bestimme ich folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus $y_1 - 2y_2 + y_3 = 1$ ergibt sich $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wieder folgt mit $y_1 - 2y_2 + y_3 = 2$ sofort $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nach der Lösungsformel aus der Vorlesung kann man jetzt das Fundamentalsystem aufstellen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2.)

a)

Es ist mal wieder ein Fundamentalsystem $y' = Ay$ gesucht:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$|A - I E| = \dots = -I^3 + 3I^2 - 3I + 1 = 0$$

Der Eigenwert ist $I = 1$, wieder mit der algebraischen Vielfachheit 3.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Hier passt der Eigenvektor $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Die anderen beiden Hauptvektoren berechne ich analog zur vorhergehenden Aufgabe und erhalte

$$e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich wieder sofort das Fundamentalsystem erstellen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

Inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem lösen:

$$y_1' = y_1 - 2y_2 + \cos x$$

$$y_2' = 2y_1 - y_3 + \sin x$$

$$y_3 = 4y_1 - 2y_2 - y_3$$

Interessanterweise ist die dritte Gleichung gar keine DG. Ob Fehler in der Aufgabenstellung oder nicht, es vereinfacht die ganze Sache doch ungemein:

$y_3 = 2y_1 - y_2$ in die zweite Gleichung einsetzen ergibt eine lineare DG:

$$y_2' = y_2 + \sin x$$

Deren Lösung ergibt sich mit Mathematica sofort zu $y_2 = c_1 e^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt wieder eine lineare DG:

$$y_1' = y_1 - 2c_1 e^x + 2\cos x + \sin x$$

mit der Lösung $y_1 = \frac{1}{2}(2e^x(-2c_1 x + c_2) - 3\cos x + \sin x)$

Das setze ich schließlich in die dritte Zeile ein

$$y_3 = -e^x c_1(1+4x) + 2e^x c_2 - \frac{1}{2}(5\cos x - 3\sin x)$$

und bin, wider Erwarten, schon fertig.

3.)

Es sind die Werte zweier Matrizen-Exponentialfunktionen zu berechnen:

a) $\exp\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ich forme die Matrix in die Form $A + IE$ um:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da das eine quadratische Matrix ist, kann man folgende Gesetzmäßigkeit anwenden:

$$e^{A+IE} = e^I e^A$$

Also haben wir

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e \cdot \exp\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ welche sich leichter berechnen lässt.}$$

Ich wende die Definition

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

zum Lösen der Matrizen-Exponentialfunktion an:

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e \cdot \left(\begin{aligned} & \frac{1}{0!} E + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{4!} (-4) E + \frac{1}{1!} (-4) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} (-4) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} (-4) \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{4!} (-4)^2 E + \frac{1}{1!} (-4)^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} (-4)^2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} (-4)^2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{4!} (-4)^3 E + \dots \end{aligned} \right)$$

Das als Summe geschrieben ergibt schließlich sofort:

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \left(\frac{1}{(4n)!} E + \frac{1}{(4n+1)!} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(4n+2)!} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{(4n+3)!} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \right)$$

b) $\exp \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Das ganze wird zunächst zerlegt. Gleichzeitig wende ich den Satz aus Aufgabe 4) an, da meine beiden Matrizen, die aus der Zerlegung resultieren, vertauschbar sind (durch die Einheitsmatrix).

$$\exp \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \exp \left(xE + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \exp(xE) \cdot \exp \left(y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Dann kann problemlos die Berechnung der beiden Faktoren erfolgen:

$$\begin{aligned} \exp(xE) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k E^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} E + \frac{x}{1!} E + \frac{x^2}{2!} E + \frac{x^3}{3!} E + \dots \\ &= \underline{e^x E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp \left(y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k}{k!} \\ &= \frac{y^0}{0!} E + \frac{y}{1!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{y^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{y^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{y^4}{4!} E + \frac{y^5}{5!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{y^6}{6!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= E - \frac{y^2}{2!} E + \frac{y^4}{4!} E - \frac{y^6}{6!} E + \dots \\ &\quad + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{y^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{y^5}{5!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \underline{\cos y \cdot E + \sin y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

...und das Endergebnis lautet:

$$\underline{\underline{\exp \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = e^x \cdot E \cdot \left(\cos y \cdot E + \sin y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}}}$$

4.)

Beweis, dass $e^{A+B} = e^A e^B$ wenn A, B quadratische Matrizen mit $AB = BA$ sind.

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} \quad (\text{Cauchy-Produktreihe}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n! A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \underline{\underline{e^{A+B}}} \end{aligned}$$

□

Ohne Vertauschbarkeit der Matrizen ist dies nicht gewährleistet.

Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = E + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier ist aber nun $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

□