Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen
Serie 10

1.)

Zu Lösen ist ein lineares Differentialgleichungssystem:

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (x > 0)$$

AB: $Y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung des homogenen Systems:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\tfrac{2}{x^2} y_1 + \tfrac{2}{x} y_2 \end{aligned}$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen lassen sich in dem Fall hier erraten:

$$\tilde{y}_{1h} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \tilde{y}_{2h} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_h = \begin{pmatrix} y_{1h} \\ y_{2h} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich durch Variation der Konstanten:

$$c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$$

$$y_{1h} = c_1 x^2 + c_2 x \qquad y_{1h}' = c_1' x^2 + c_1 2x + c_2' x + c_2$$

$$y_{2h} = c_1 2x + c_2 \qquad y_{2h}' = c_1' 2x + 2c_1 + c_2'$$

Einsetzen in inhomogenes System:

$$\begin{aligned} c_1' x^2 + c_1 2x + c_2' x + c_2 &= c_1 2x + c_2 + x^4 \\ c_1' 2x + 2c_1 + c_2' &= -\tfrac{2}{x^2}\left(c_1 x^2 + c_2 x\right) + \tfrac{2}{x}\left(c_1 2x + c_2\right) + x^3 \\ &= -2c_1 - \frac{2c_2}{x} + 4c_1 + \frac{2c_2}{x} + x^3 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1' x^2 + c_2' x &= x^4 \\ c_1' 2x + c_2' &= x^3 \end{aligned},$$

und dessen Lösung ist: $c_1' = 0, c_2' = x^3$,

woraus wieder folgt: $c_1 = \text{const} := 0, c_2 = \frac{1}{4} x^4$

Also haben wir die allgemeine Lösung

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4} x^4 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

und mit AB ergibt sich:

$c_1 = 1\tfrac{3}{4}, c_2 = -19$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1\tfrac{3}{4}\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} - 19\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}x^4\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.)

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem:

$$y_1' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} + 1, \qquad y_2' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} + x \qquad (x > 0)$$

Fundamentalsystem für homogenes System:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} \\ y_2' &= \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} \end{aligned} \qquad (*)$$

Da $y_1' = y_2'$ kann man folgendermaßen lösen:

$y_2 = y_1 + c$ einsetzen in (*)

$$y_1' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_1 + c}{x} = \frac{-y_1 - 2c}{x}$$

$$y_1' + \frac{y_1}{x} = -\frac{2c}{x}$$

Das ist eine lineare DG, deren Lösung ist:

$y_1 = -2c + \frac{\tilde{c}}{x}$ (Quelle: *Mathematica...*)

und $y_2 = -c + \frac{\tilde{c}}{x}$

Die homogene Lösung ist also (mit anderen Parametern):

$$Y_h = \begin{pmatrix} y_{1h} \\ y_{2h} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Das sind dann bereits unsere beiden linear unabhängigen Lösungsvektoren, d.h. die Fundamentalmatrix lautet:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{x} \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Lösung des AWP für das inhomogene System mit Variation der Konstanten:

$$c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x)$$

$$y_{1h} = 2c_1 + \frac{c_2}{x} \qquad y'_{1h} = 2c'_1 + \frac{c'_2 x - c_2}{x^2}$$

$$y_{2h} = c_1 + \frac{c_2}{x} \qquad y'_{2h} = c'_1 + \frac{c'_2 x - c_2}{x^2}$$

Einsetzen in inhomogenes System:

$$2c'_1 + \frac{c'_2 x - c_2}{x^2} = 2\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \frac{2}{x}\left(c_1 + \frac{c_2}{x}\right) + 1$$

$$\underline{2c'_1 + \frac{c'_2}{x} = 1} \qquad (**)$$

$$c'_1 + \frac{c'_2 x - c_2}{x^2} = 2\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \frac{2}{x}\left(c_1 + \frac{c_2}{x}\right) + x$$

$$\underline{c'_1 + \frac{c'_2}{x} = x} \qquad (***)$$

Dieses Gleichungssystem aus (**) und (***) muss wieder gelöst werden:

$$c'_1 = x - \frac{c'_2}{x}$$

$$2x - 2\frac{c'_2}{x} + \frac{c'_2}{x} = 1$$

$$2x - \frac{c'_2}{x} = 1$$

$$c'_2 = 2x^2 - x$$

$$\underline{c_2 = \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2}$$

$$c'_1 = x - 2x + 1$$

$$= -x + 1$$

$$\underline{c_1 = -\tfrac{1}{2}x^2 + x}$$

...wodurch sich die allgemeine Lösung ergibt:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + x\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Setzt man noch die Anfangswerte ein, so erhält man schließlich:

$$1 = 2c_1 + c_2 + 1 + 1\tfrac{1}{6}$$

$$1 = c_1 + c_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}$$

$$\rightarrow c_1 = -\tfrac{1}{2},\ c_2 = \tfrac{5}{6}$$

$$\underline{\underline{Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{5}{6}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + x\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}}}$$

3.)

Zu zeigen ist, dass jede Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ mit der nilpotenten Matrix A $\left(A^l = 0\right)$ ein Polynom vom Grad $\leq l-1$ ist.

Beweis:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Das kann man jetzt mit der Matrix A (von links, da Matrixmultiplikation nicht kommutativ) multiplizieren:

$$Ay' = A^2 y$$

Nach Vorraussetzung ist $y' = Ay$. Ich setze y' für y und daraus folgt:

$$y'' = A^2 y$$

Das lässt sich l mal wiederholen

$$y^{(l)} = A^l y$$

und nach Vorraussetzung ist das, da A nilpotent ist, gleich 0.

$$y^{(l)} = A^l y = 0$$

$$y_1^{(l)} = 0$$
$$\vdots$$
$$y_n^{(l)} = 0$$

Die Lösung ergibt sich jetzt sofort durch l malige elementare Integration, wodurch ein Polynom vom Grad *l-1* entsteht, dessen Koeffizienten durch evtl. Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

□

4.)

Es ist ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \qquad i = 1 \ldots n,\ a_j = \text{const}$$

zu bestimmen.

Ich bestimme die Lösung durch eine Verallgemeinerung für den Fall n=3.

$$y' = Ay$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix A berechnen sich als die Nullstellen des Polynoms der Determinante $\left| A - l\,E \right|$

$$\begin{vmatrix} a_1 - l & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 - l & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 - l \end{vmatrix} = (a_1 - l)(a_2 - l)(a_3 - l) + 2a_1a_2a_3 - a_1a_3(a_2 - l) - a_1a_2(a_3 - l) - a_2a_3(a_1 - l)$$

$$= (a_1 - l)(a_2a_3 - a_2 l - l\,a_3 + l^2) + a_1a_3 l - a_1a_2a_3 + a_1a_2 l + a_2a_3 l$$

$$= a_1 l^2 + a_2 l^2 + a_3 l^2 - l^3$$

$$= l^2 (a_1 + a_2 + a_3 - l) = 0$$

Die Nullstellen sind:

$l_{1,2} = 0,\ l_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Dazu benötigen wir jetzt noch die Eigenvektoren:

$l = 0$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_2 = 0$$

$$y_3 = -\tfrac{1}{a_3}(a_1y_1 + a_2y_2)$$

...ich wähle $y_1 = 1, y_2 = 0$ und $y_1 = 0, y_2 = 1$, daraus folgen die beiden Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{a_2}{a_3} \end{pmatrix}$$

$l = a_1 + a_2 + a_3$:

$$\begin{pmatrix} -a_2 - a_3 & a_2 & a_3 \\ a_1 & -a_1 - a_3 & a_3 \\ a_1 & a_2 & -a_1 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-a_2 - a_3)\,y_1 + a_2y_2 + a_3y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{a_2y_2 + a_3y_3}{a_2 + a_3}$$

... und als Eigenvektor passt hier $y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus diesen drei Eigenvektoren folgt nun sofort das Fundamentalsystem

$$\left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{a_2}{a_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a_1+a_2+a_3)x} \end{bmatrix} \right\}$$

Das verallgemeinere ich nun auf beliebige n:

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_2}{a_n} \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a_1+a_2+\ldots+a_n)x} \end{bmatrix} \right\}}}$$

Zugegebenermaßen müsste man das jetzt noch mit vollständiger Induktion beweisen, worauf ich hier aber lieber verzichten will...