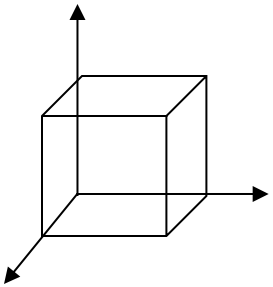
Inhaltsverzeichnis

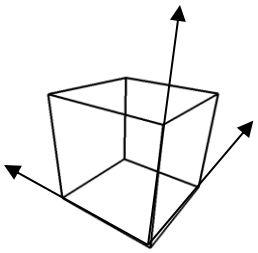
2.1 Koordinatensysteme

Koordinatensysteme



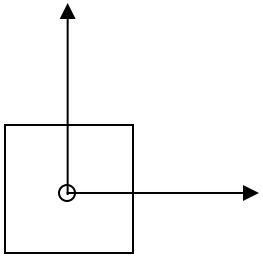
- Weltkoordinaten (3D) IR^3

  ↓ Affine Transformationen



- Beobachterkoordinaten (3D) IR^3

  ↓ Projektionen



- Normalisierte Koordinaten (3D) [-1,1]x[-1,1]x[-1,1]

2.4 Projektionen

- Abbildung aus einem Raum der **Dimension n** in einen Raum der **Dimension m**, mit **m<n**.

- Bildschirm ist zweidimensionales Ausgabemedium: dreidimensionale Objekte werden in zweidimensionalen Ansichten dargestellt
- Hierzu wird ein **Raumpunkt entlang eines Projektionsstrahls** (Projector) auf eine **vorgegebene Projektionsebene** (Projection Plane) abgebildet.

- Projektionsstrahl durch **Projektionszentrum und Raumpunkt** festgelegt.
- **Schnittpunkt** des Projektionsstrahls mit der Projektionsebene bestimmt **projizierten Raumpunkt**.

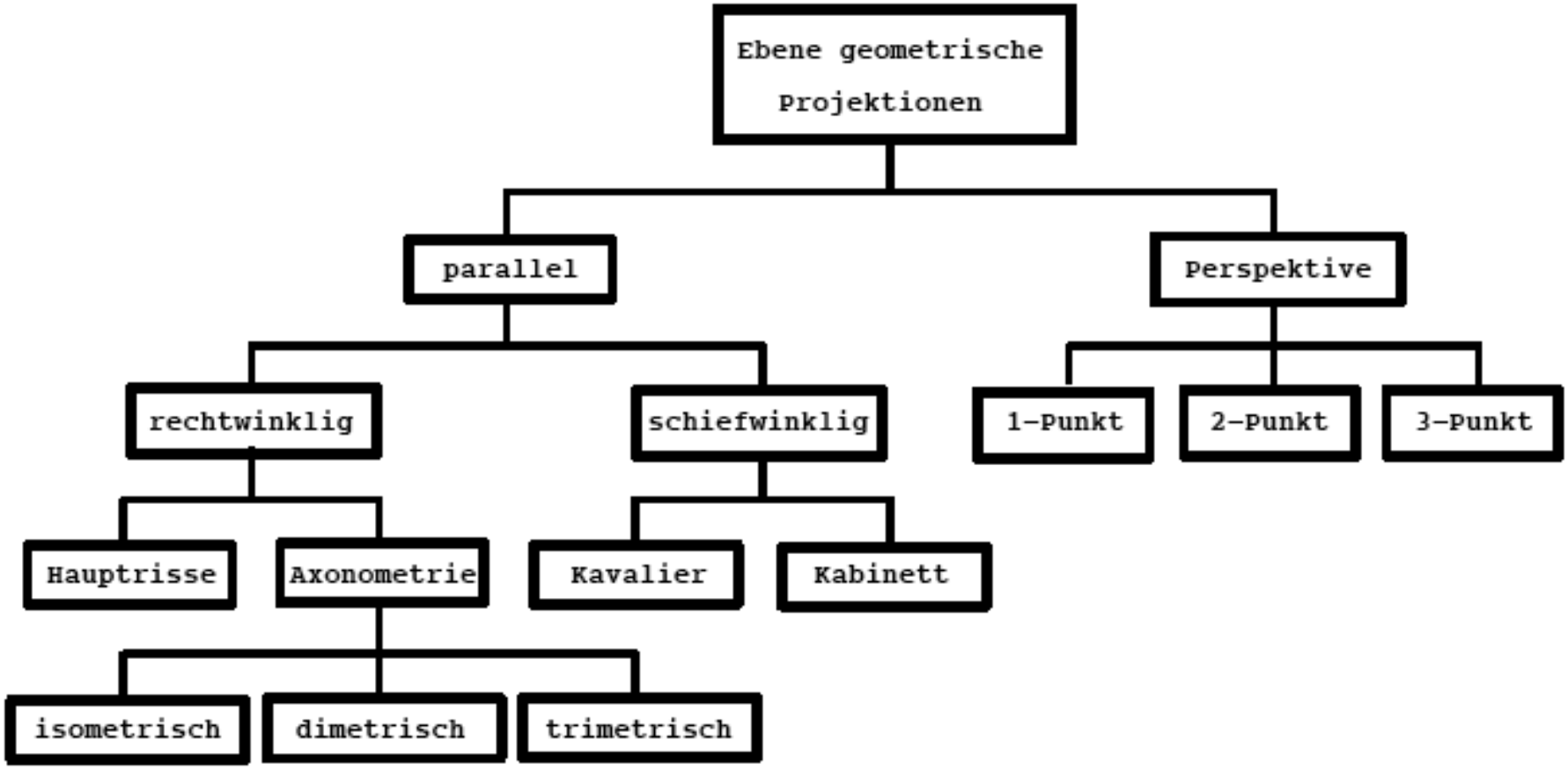
2.4 Projektionen

- **Perspektivische Projektion** (Zentralprojektion) und **Parallelprojektion** sind geometrisch planare Projektionen.

- Projektionszentrum der Parallelprojektion liegt in einem **unendlich fernen Punkt**.
- Im Rahmen der projektiven Geometrie stellt die Parallelprojektion somit einen **Spezialfall der Zentralprojektion** dar.

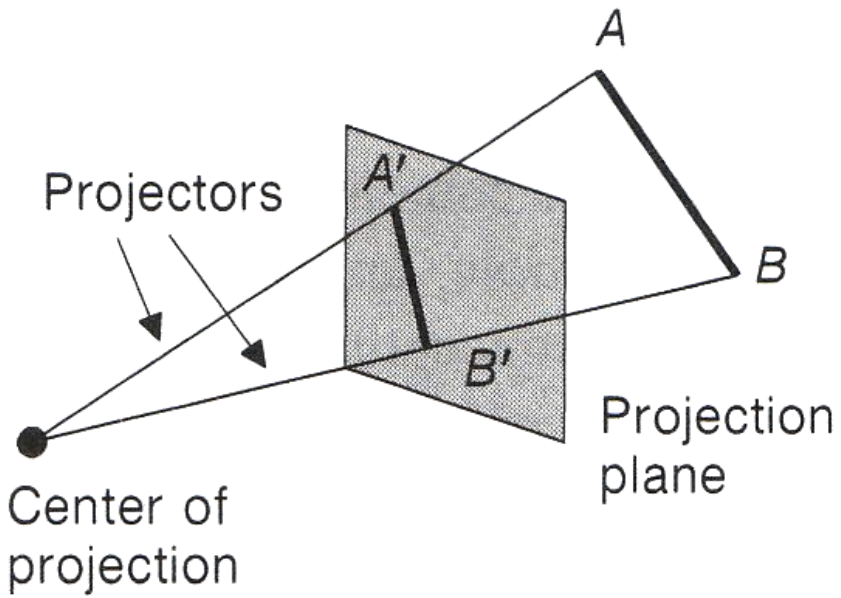
Dies lässt sich z.B. bei der praktischen Umsetzung der Projektionen als **Matrixschreibweisen** gewinnbringend anwenden!

Klassifikation der gängigen Projektionsarten



2.5 Perspektivische Projektion

- Alle Projektionsstrahlen laufen durch das Projektionszentrum
- Projektionszentrum fällt mit dem **Auge** des Beobachters zusammen
- Das Verfahren erzeugt eine **optische Tiefenwirkung**
- Geht in seinen Anfängen bis in die **Malerei der Antike** zurück.



2.5 Perspektivische Projektion

2.5 Perspektivische Projektion

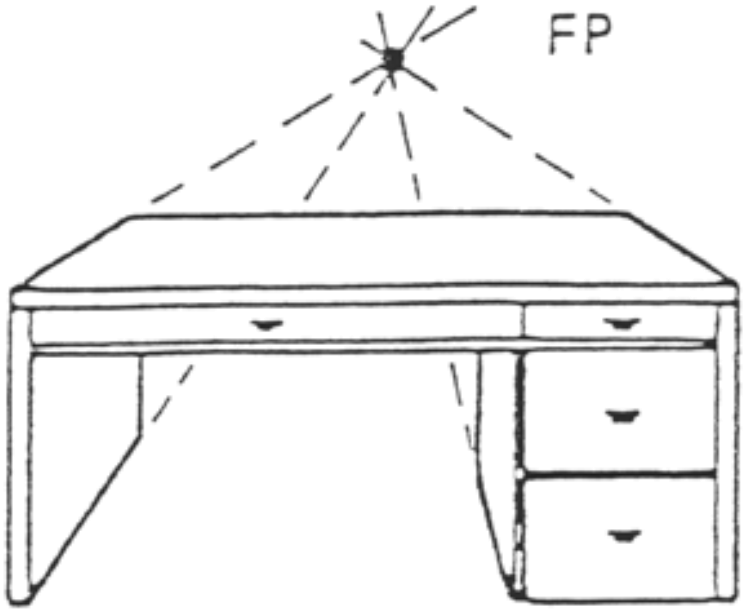
Eigenschaften

- Je zwei parallele Geraden, die nicht parallel zur Projektionsebene sind, treffen sich in einem Punkt, dem Fluchtpunkt.
- Es gibt **unendlich viele Fluchtpunkte**, je einen pro Richtung nicht parallel zur Projektionsebene.
- Hervorgehoben werden die **Fluchtpunkte der Hauptachsen**
  - Geraden, die parallel zur x-Achse verlaufen, treffen sich im x-Fluchtpunkt (für die anderen Hauptachsen wird dies ähnlich definiert).

- Perspektivische Projektionen werden nach der **Anzahl der Hauptachsen**, die von der Projektionsebene geschnitten werden, klassifiziert
  - 1-Punkt-, 2-Punkt- und 3-Punkt-Perspektiven.

2.5 Perspektivische Projektion

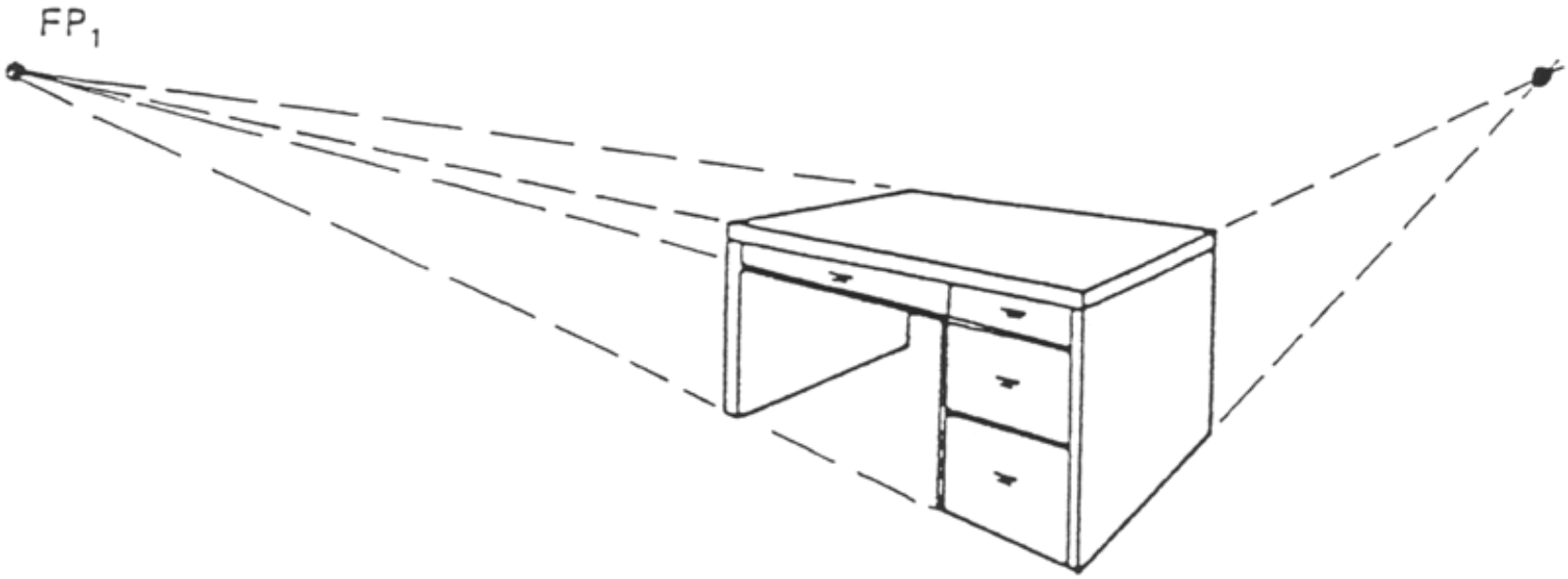
Beispiel



1-Punkt-Perspektive

2.5 Perspektivische Projektion

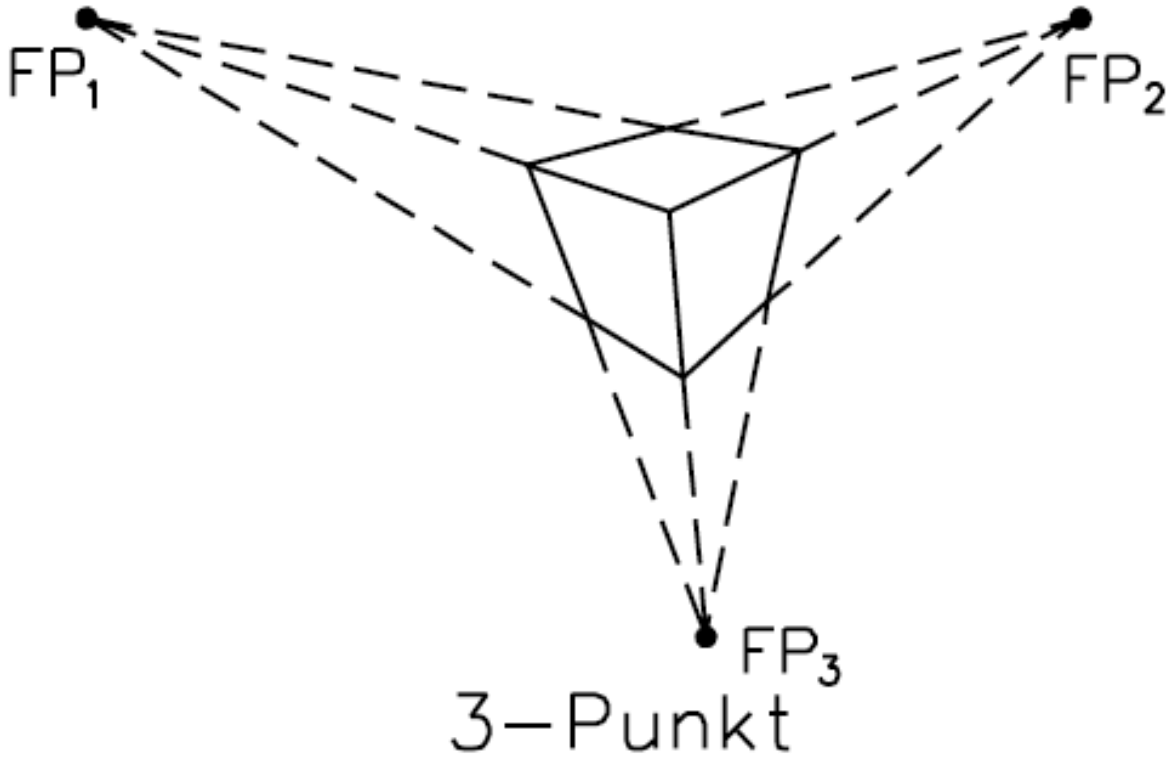
Beispiel



2-Punkt-Perspektive

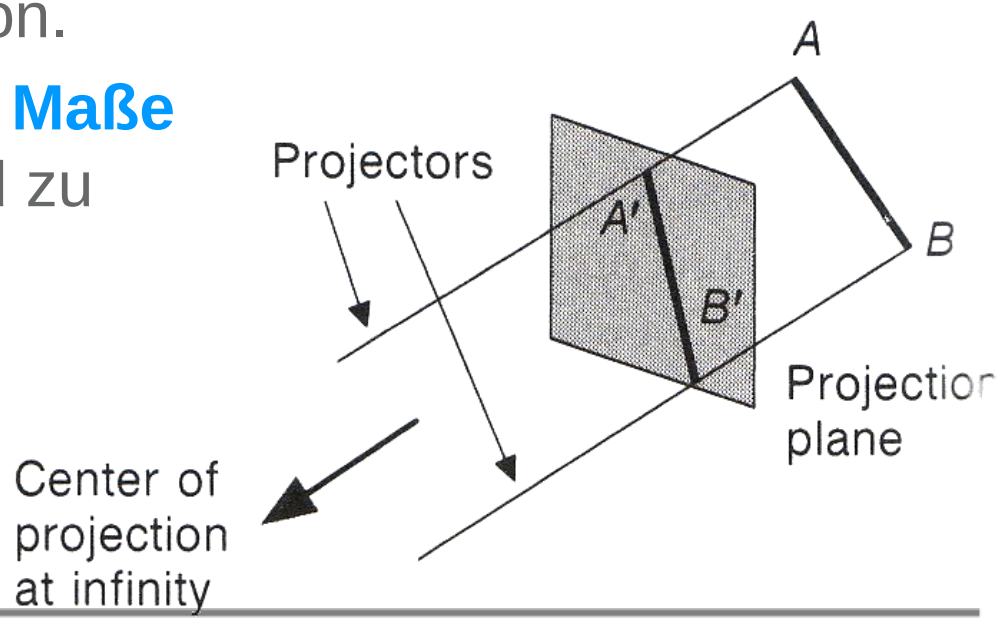
2.5 Perspektivische Projektion

Beispiel



2.6 Parallelprojektion

- Bei der Parallelprojektion ist das **Projektionszentrum im Unendlichen.**
- Alle Projektionsstrahlen **verlaufen parallel** in einer Richtung.
- Die Parallelprojektion ist **weniger realistisch** als die perspektivische Projektion.
- Aber besser, um **exakte Maße** aus dem projizierten Bild zu bestimmen.



2.6 Parallelprojektion

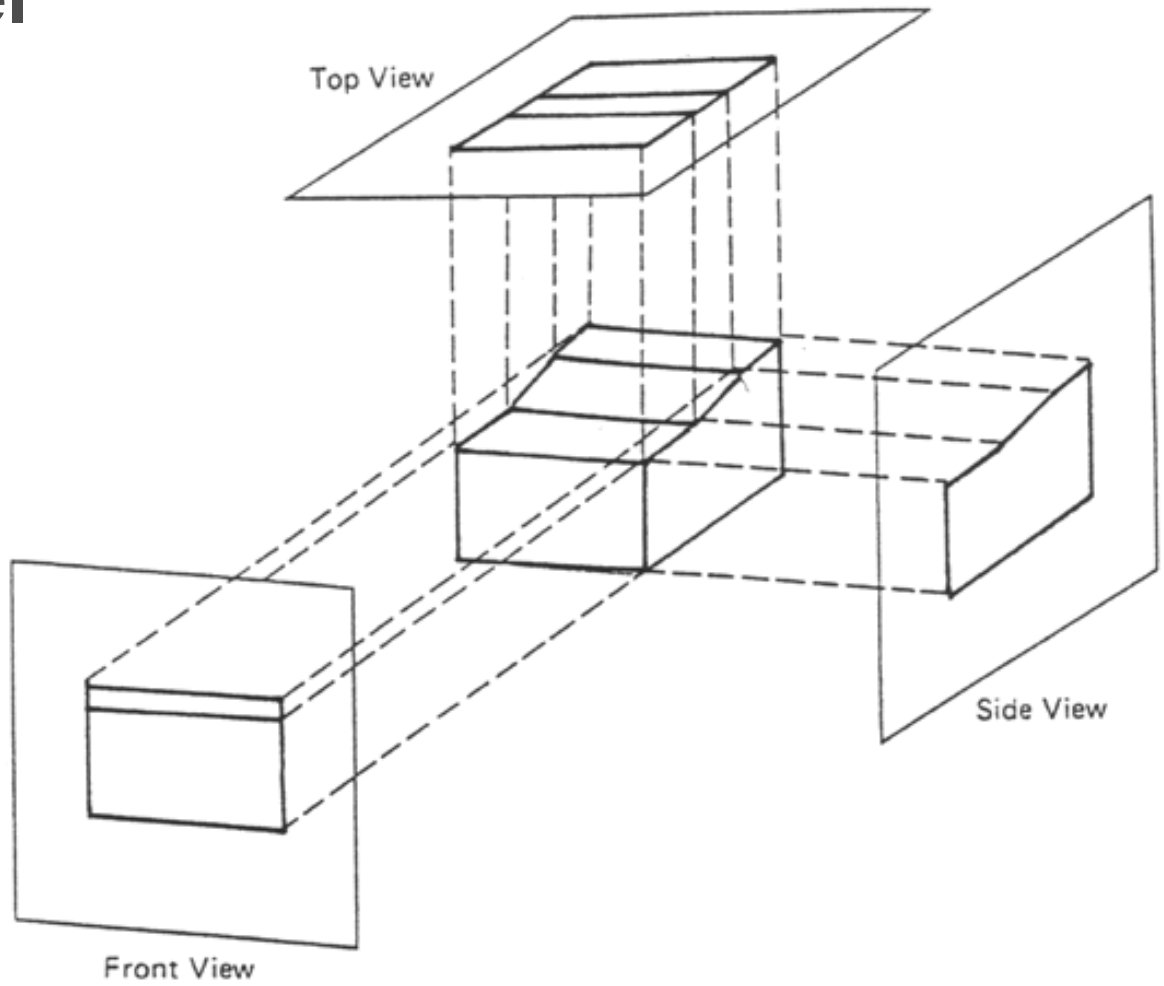
- Die Projektionsstrahlen können bei Parallelprojektionen **gegen die Projektionsebene schief** ($\Rightarrow$ schiefe Projektionen) oder **senkrecht** ($\Rightarrow$ orthographische Projektionen) stehen.

Orthographische Projektion

- Projektionsrichtung fällt mit der **Ebenennormalen** zusammen.
- Man unterscheidet **Hauptrisse und Axonometrie**.
- Bei den so genannten Hauptrissen schneidet die **Projektionsebene nur eine Hauptachse.**
  - Grundriss (Top View), Aufriss (Front View), Kreuzriss (Side View)
  - Die **Normale** der Projektionsebene ist also **parallel** zu einer der **Hauptachsen**.

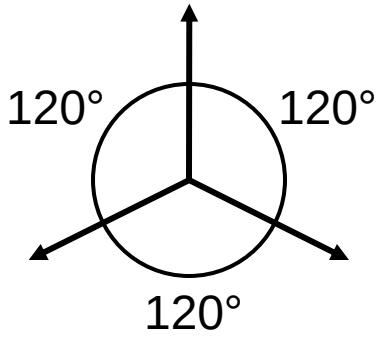
2.6 Parallelprojektion

Beispiel



2.6 Parallelprojektion

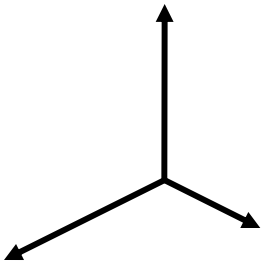
- Bei der **Axonometrie** ist die Projektionsebene nicht orthogonal zu einer der Koordinatenachsen.
- **Parallele Linien** werden auf parallele Linien abgebildet.
- Winkel bleiben allerdings **nicht erhalten**.
- Abstände können **längs der Hauptachsen gemessen** werden, allerdings i.A. in jeweils einem anderen Maßstab.
- Im häufigsten Fall der **isometrischen Axonometrie** bildet die Projektionsebene mit allen Hauptachsen den **gleichen Winkel.**
  - Gleichmäßige Verkürzung aller Koordinatenachsen.
  - Es gibt nur **acht mögliche** isometrische Projektionen

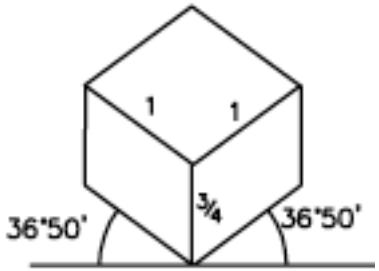


2.6 Parallelprojektion

Dimetrischen Projektion

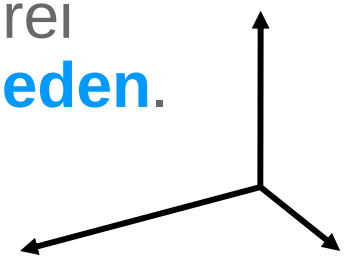
- Projektionsebene mit zwei Hauptachsen den **gleichen Winkel**
- **Skalierung** ist in zwei
- Achsenrichtungen **gleich**

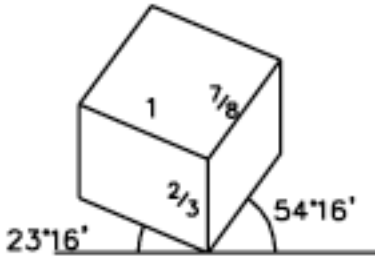




Trimetrischen Projektion Projektionsebene mit jeder Achse einen **anderen Winkel**

- Skalierungen sind in den drei Achsenrichtungen **verschieden**.





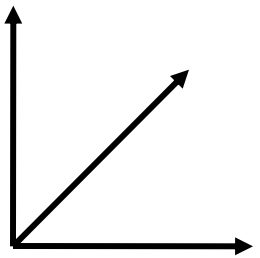
2.6 Parallelprojektion

Schiefe Parallelprojektionen

- **Projektionsrichtung unterscheidet** sich von der Projektionsebenennormalen
- Am gebräuchlichsten sind die so genannte **Kavalier-** und die sog. **Kabinettprojektion**.

Kavalierprojektion

- Der Winkel zwischen Projektionsrichtung und Bildebene **beträgt 45°**
- Hier bleibt die **Länge der Projektion einer Linie**, die senkrecht zur Bildebene steht, unverändert.
- Es gibt **unendlich viele Kavalierprojektionen**, eine für jede Richtung in der Bildebene.

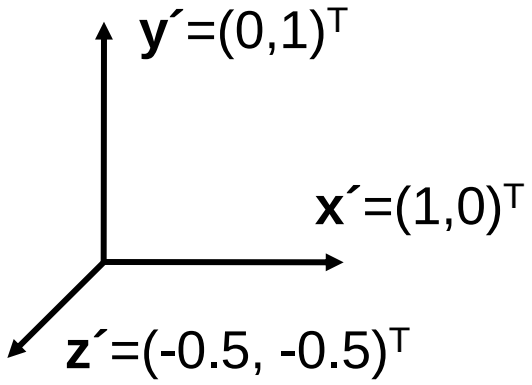


2.6 Parallelprojektion

Kabinettprojektion

- Länge der Projektion einer zur Projektionsebene (zB. z) senkrechten Linie **soll die Hälfte ihrer Originallänge** werden.
- Der **Winkel zwischen der Projektionsrichtung** und der Bildebene beträgt somit arctan(2) = 63.4°.

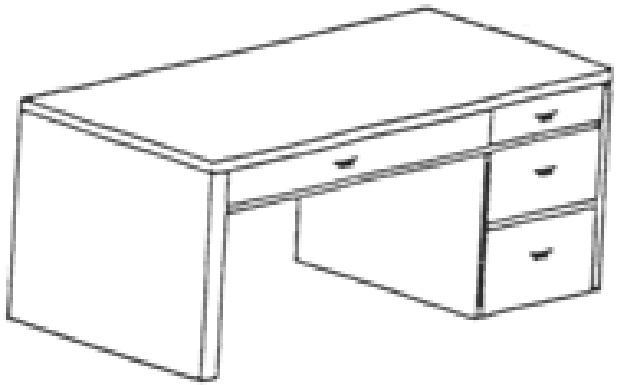
Beispiel:



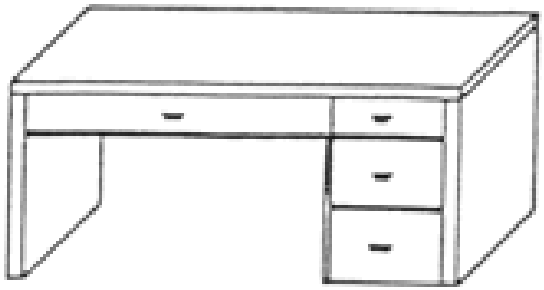
projizierte Einheitsvektoren

2.6 Parallelprojektion

Beispiel



isometrisch: 1:1:1



Kabinettprojektion

Kavalierprojektion

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

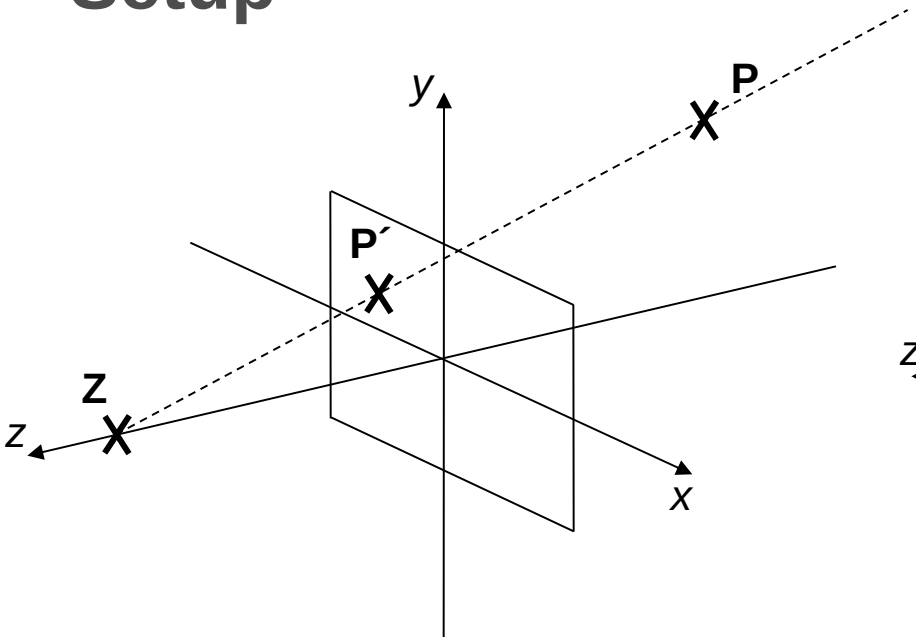
- Die praktische Umsetzung der perspektivischen Projektion erfolgt je nach Anwendung in **unterschiedlichsten Konfigurationen.**
- Diese können mittels **geeigneter Transformationen** des Koordinatensystems erreicht werden.

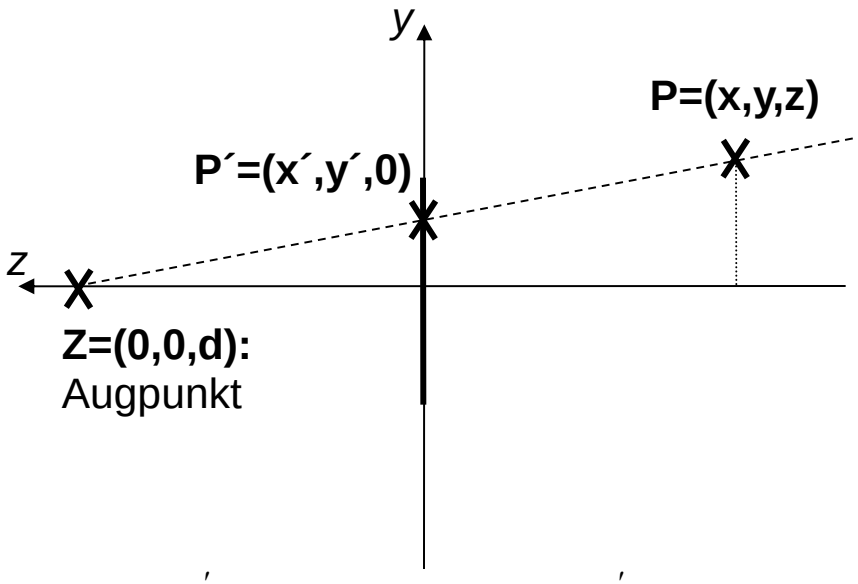
Exemplarisch wählen wir folgendes Setup:

- Projektionszentrum Z und der Augpunkt **fallen zusammen.**
- Beide liegen auf der **positiven z-Achse** mit Abstand d>0 zum Ursprung, also Z=(0,0,d)
- **Blickrichtung** ist die negative z-Achse
- **Bildebene** liegt in der (x,y)-Ebene

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

Setup





- Aus dem **Strahlensatz** folgt: $\frac{y'}{d} = \frac{y}{d-z}$ und $\frac{x'}{d} = \frac{x}{d-z}$

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

- Aus dem **Strahlensatz** folgt:

$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{d-z} \Rightarrow x' = \frac{x \cdot d}{d-z} \quad \text{und} \quad \frac{y'}{d} = \frac{y}{d-z} \Rightarrow y' = \frac{y \cdot d}{d-z}$$

- Folglich gilt:

$$[x,y,z,1] \mapsto \left[\frac{x \cdot d}{d-z} \quad \frac{y \cdot d}{d-z} \quad 0 \quad 1 \right] = [x \cdot d \quad y \cdot d \quad 0 \quad d-z]$$

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

$$[x,y,z,1] \mapsto \begin{bmatrix} \frac{x \cdot d}{d-z} & \frac{y \cdot d}{d-z} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d & y \cdot d & 0 & d-z \end{bmatrix}$$

- Die Zentralprojektion wird in diesem Setup somit durch folgende Matrix M beschrieben:

$$[x,y,z,1] \mapsto [x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x,y,z,1] \begin{bmatrix} -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix}$$

$$= [x,y,z,1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x,y,z,1]M$$

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

Zerlegung der perspektivischen Projektion

- Perspektivische Transformation M_T $(IR^3 \Rightarrow IR^3)$
- Parallele Projektion M_P auf Ebene z=0 $(IR^3 \Rightarrow IR^2)$

$$M = M_T \cdot M_p \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

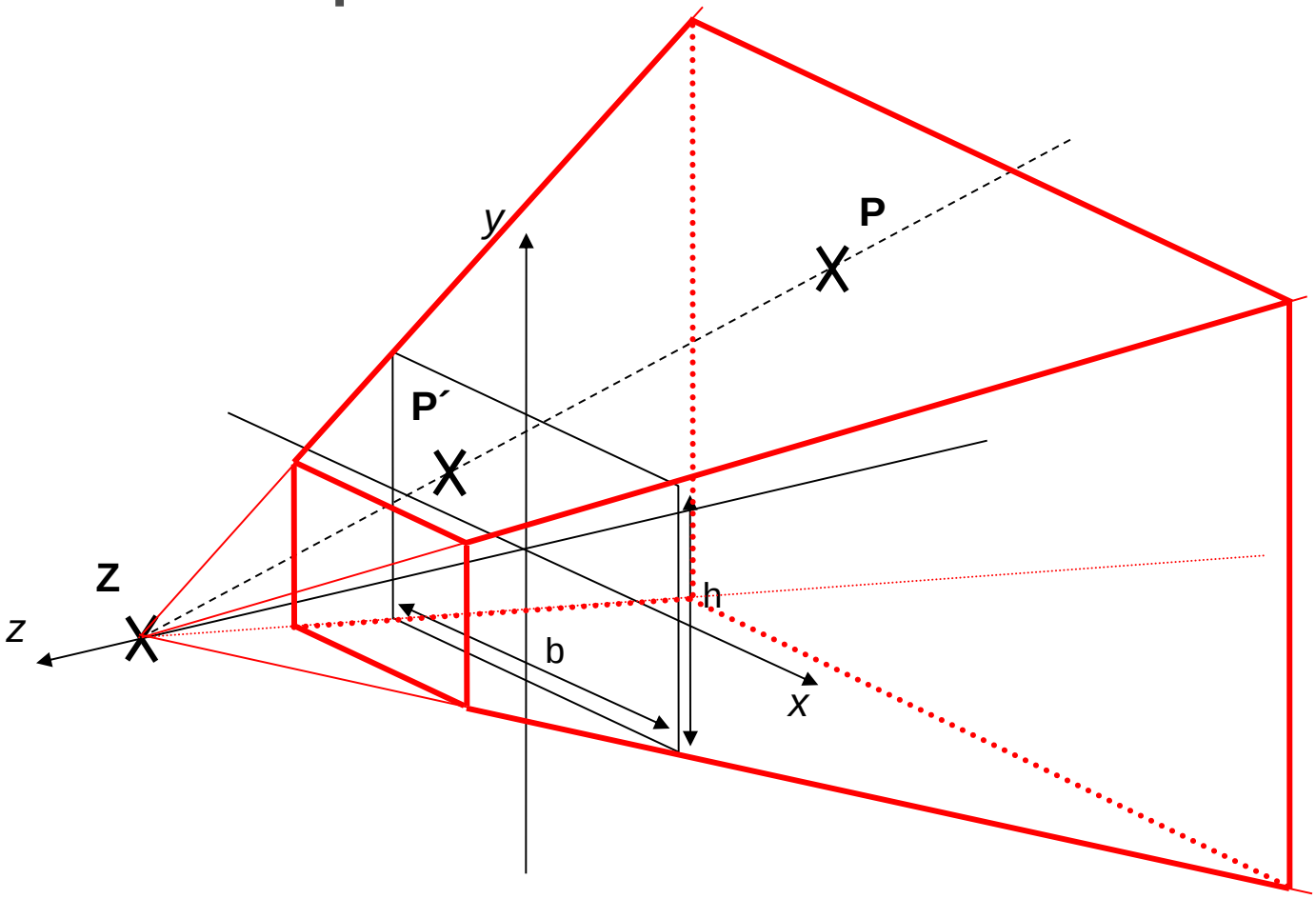
2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

Erweitertes Setup

- In der Bildebene wird ein **Sichtfenster** (View Window) spezifiziert (Breite b, Höhe h, Verhältnis Breite zu Höhe/AR);
  - das Sichtfenster ist **symmetrisch** um den Ursprung angeordnet
- Die Projektoren durch die **Ecken der Bildebene** definieren das so genannte Sichtvolumen (Viewing-Frustum)
- Zusätzlich **begrenzen zwei zur Bildebene parallele Ebenen** (Nahclipebene mit z_{nah} und Fernclipebene mit z_{fern}) das Sichtvolumen in z-Richtung.
- Das Sichtvolumen **begrenzt den Teil des Raums**, der dargestellt werden soll ($\Rightarrow$ **Clipping**).

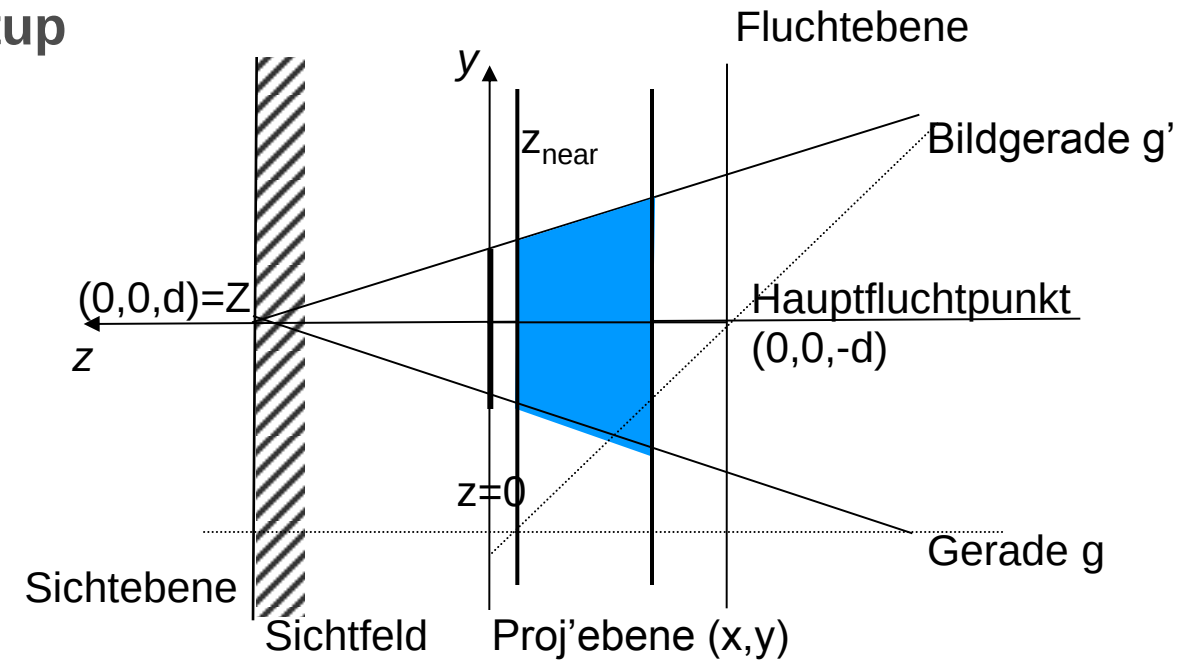
2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

Erweitertes Setup



2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

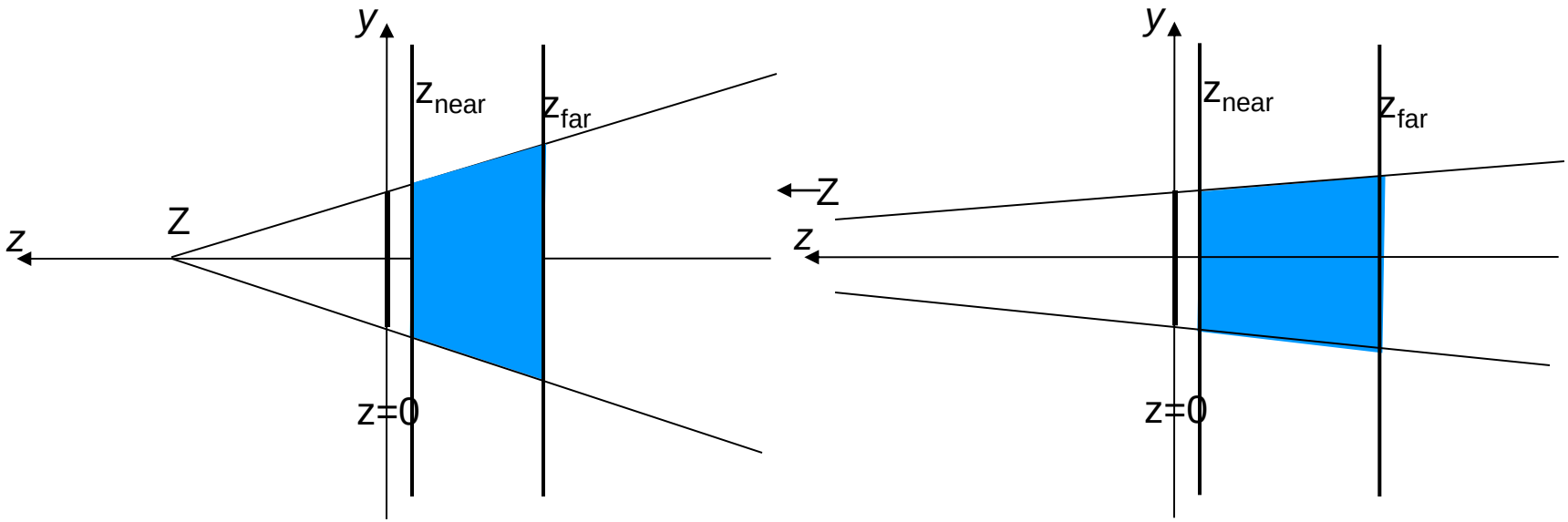
Erweitertes Setup



- Sichtebene: Wandert **ins Unendliche** (alle Punkte): w = 0
- Sichtfeld ist ein **Halbraum** (ohne Sichtebene)
- Projektionsebene (x,y) ist **Fixebene**
- Alle Punkte (x,y,z,0) werden **auf Fluchtebene** abgebildet
- Geraden g **parallel zur z-Achse** werden auf auf **Projektionsebene und den Hauptfluchtpunkt** (1-Punkt-Perspektive) zur Bildgeraden g‘ abgebildet

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

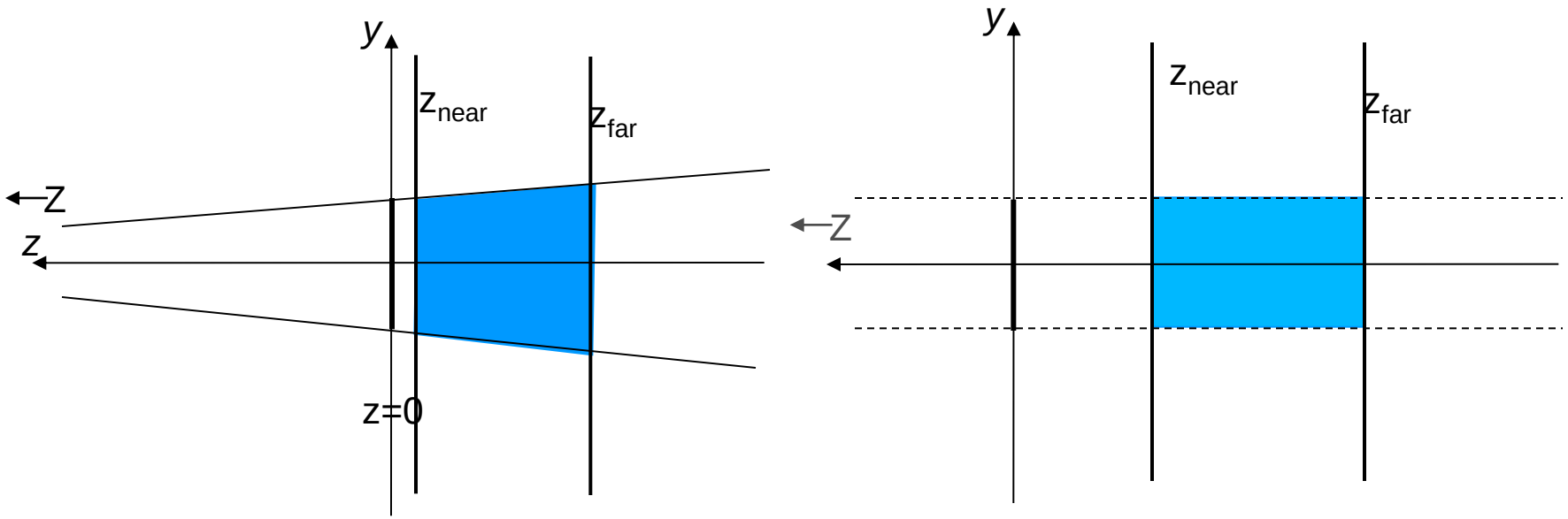
Perspektivische Transformation M_T des Sichtvolumens



- Affine Gerade durch Z und [x‘,y‘,0,1] wird auf Gerade parallel zu z-Achse abgebildet
- Sichtfenster in z=0 bleibt **gleich groß**
- Translation in den Ursprung (NDC)
  - Kann extra Transformation sein
  - Kann in M_T integriert sein

2.7 Zentralprojektion - Umsetzung

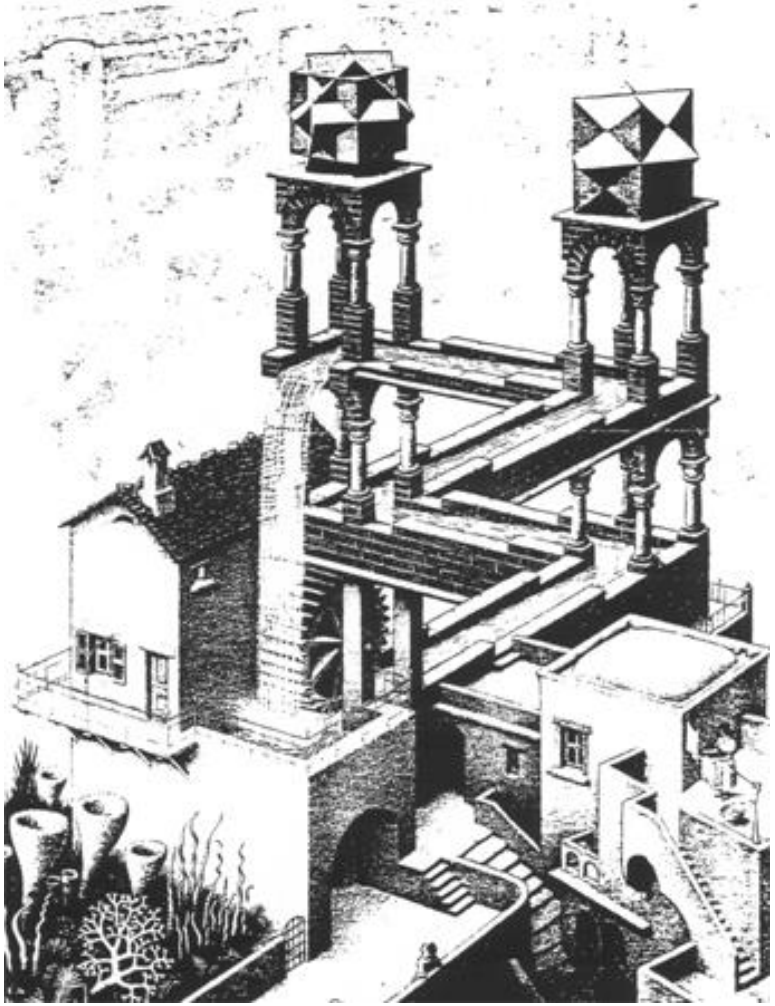
Perspektivische Transformation M_T des Sichtvolumens



- Affine Gerade durch Z und [x‘,y‘,0,1] wird auf Gerade parallel zu z-Achse abgebildet
- Sichtfenster in z=0 bleibt **gleich groß**
- Translation in den Ursprung (NDC)
  - Kann extra Transformation sein
  - Kann in M_T integriert sein

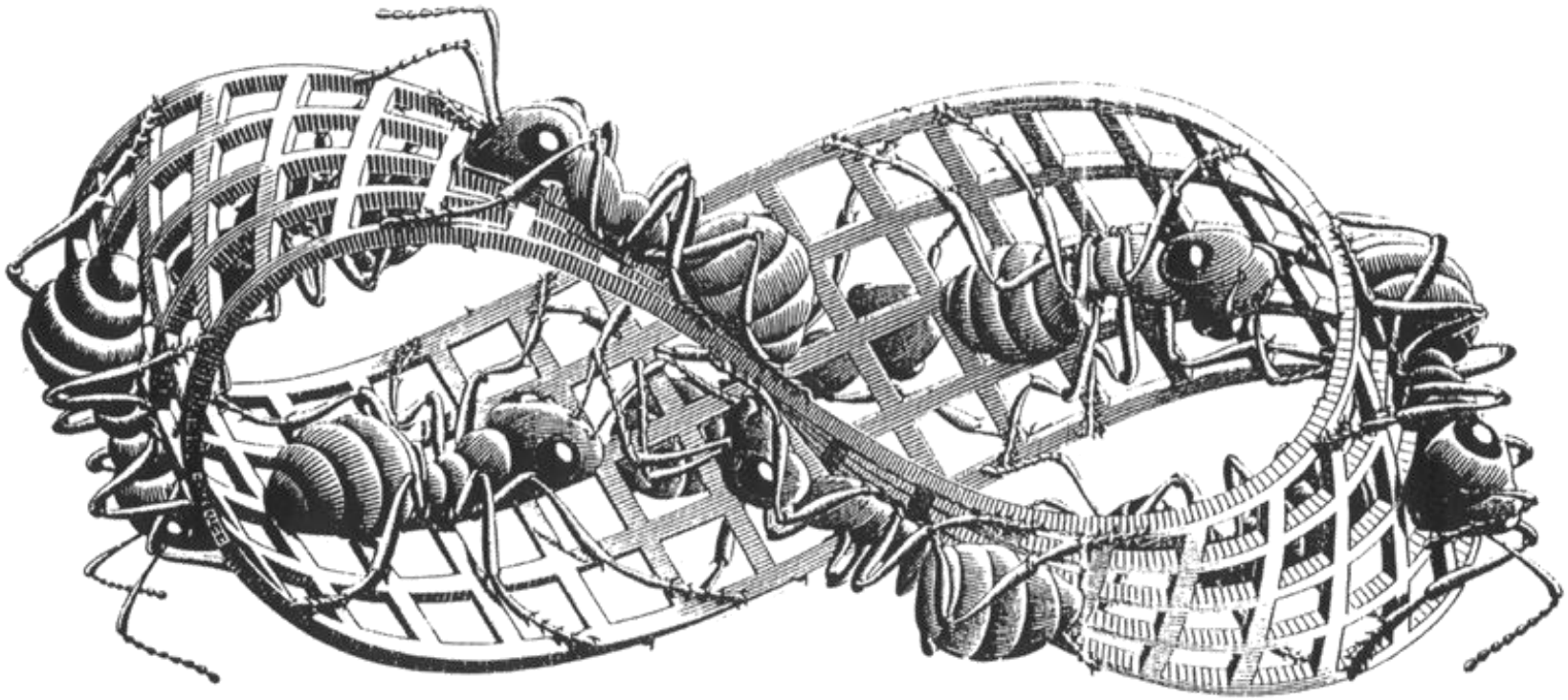
2.8 Projektionen?

2.8 Projektionen?



2.8 Projektionen?

2.8 Projektionen?



Motivation

- Objektdefinition, **Szenenmodellierung**, Sichtdefinition, Animation, Rendering, Ausgabe, ...

⇒ Einsatz verschiedenster Koordinatensysteme

⇒ Hard- und softwaregestützte Umrechnung / Transformation zwischen Koordinatensystemen (idR. bis auf Translationen Basistransformationen im IR^3)

2.9 Koordinatensysteme und mehr...

Objektkoordinatensystem OC
(local / object / Modeling Coordinate System)

- **Eigenes** Koordinatensystem für jedes Objekt sinnvoll
- Erleichtert Modellierung und Animation
- Oft über **geometrische Eigenschaften** des Objektes (zB. Symmetrien oder ausgezeichnete Richtungen)

oder durch

- **Erwünschte Aktionen** des Objektes (zB. Flug entlang Kurve mit gleichzeitiger Drehung)

festgelegt

- Auch für Lichtquellen möglich

Weltkoordinatensystem WC
(World / Global / Scene Coordinate System)

- Hier „lebt“ die gesamte Szene
- Objekte (Objektkoordinatensysteme) werden mittels Transformationen plaziert
- Zum Rendern: Umrechnung lokaler Objektkoordinaten in globale Objektkoordinaten

  (bei Animationen d. h. animiertes Objekt: dynamisch in jedem Frame!)
- Hier ebenso: Beleuchtung der Szene

Beobachterkoordinatensystem BC
(Eye / Camera Coordinate System)

- Auch Sichtkoordinatensystem
- Konzept: virtuelle Kamera mit entsprechenden Parametern
- Im Weltsystem (mittels Transformationen) verankert
- So soll es der Beobachter sehen
  $\Rightarrow$ hier wird der Bildausschnitt (Sichtfenster) definiert!
- Zum Rendering: idR. Umrechnung globaler Koordinaten **in Sichtkoordinaten** („Szene vor die Kamera drehen“)
  (bei Animationen d. h. animierter Kamera: dynamisch in jedem Frame!)
- Virtuelle Kamera bestimmt auch Art der Projektion

Normalisiertes Koordinatensystem NDC (Normalized Device Coordinate System)

- Nach perspektivischer/paralleler Transformation
- Sichtvolumen ist **Einheitswürfel** [-1,1]x[-1,1]x[-1,1] (in manchen Darstellungen auch [0,1]x[0,1]x[0,1])
- Erleichtert (Vergangenheit) **Hardware**-Operationen
- aber auch viele Softwaretransformationen (**Clipping**)

Bemerkung

- Vorsicht vor Verwirrungen
- Für Transformationen existieren **mehrere äquivalente** Sichtweisen!

„Transformation der Punkte“ - A

- Koordinatensystem bleibt **fest**
- **Punkt ändert Ort** und damit Koordinaten im gleichen System
- Beteiligte Koordinatensysteme: 1

Bemerkung (Fortsetzung)

„Transformation des Koordinatensystems“ - B

- Koordinatensystem wird der **inversen Transformation** der Punkttransformation unterworfen
  ⇒ **Koordinatensystem bewegt** sich!
- **Punkt bleibt fest**, ändert allerdings Koordinaten, da in neuem System beschrieben
- Beteiligte Koordinatensysteme: eigentlich nur 1 (aber: vorher, nachher)

  ⇒ „Transformation zwischen Koordinatensystemen“

2.9 Koordinatensysteme und mehr...

hervorragend geeignet
für Modellierung und Animation!

Bemerkung (Fortsetzung)

„Transformation mittels Koordinatensystem“ - C

- Ein dem Punkt **lokales Koordinatensystem** wird mittels der Punkttransformation im globalen Koordinatensystem bewegt

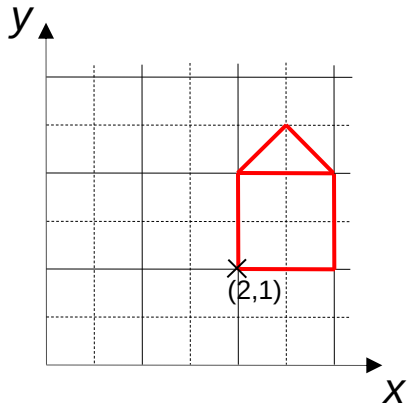
  $\Rightarrow$ (lokales) **Koordinatensystem bewegt** sich!
- Anschließend wird Punkt (mit „alten“ Koordinaten) in **bewegtes lokales Koordinatensystem eingetragen**

  $\Rightarrow$ Punkt ändert Ort
- beteiligte Koordinatensysteme: 2

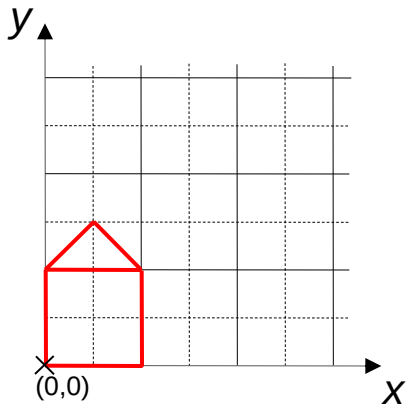
Verständnisübungen zu 2D-Transformationen

(hintereinander ausgeführte und zusammengesetzte Transformationen)

I) Führen Sie die Transformation R(45°)T(3,1) am Haus aus mittels:
a) Sichtweise A,
b) Matrixrechnung,
c) Sichtweise C.



II) Führen Sie die Transformation R(120°)T(2,2)R(30°)T(2,1) am Haus aus mittels:
a) Sichtweise A,
b) Sichtweise C.



III) Ermitteln Sie allgemein die zusammengesetzten Matrizen für die Transformationen R(φ)T(a,b) und T(a,b)R(φ).

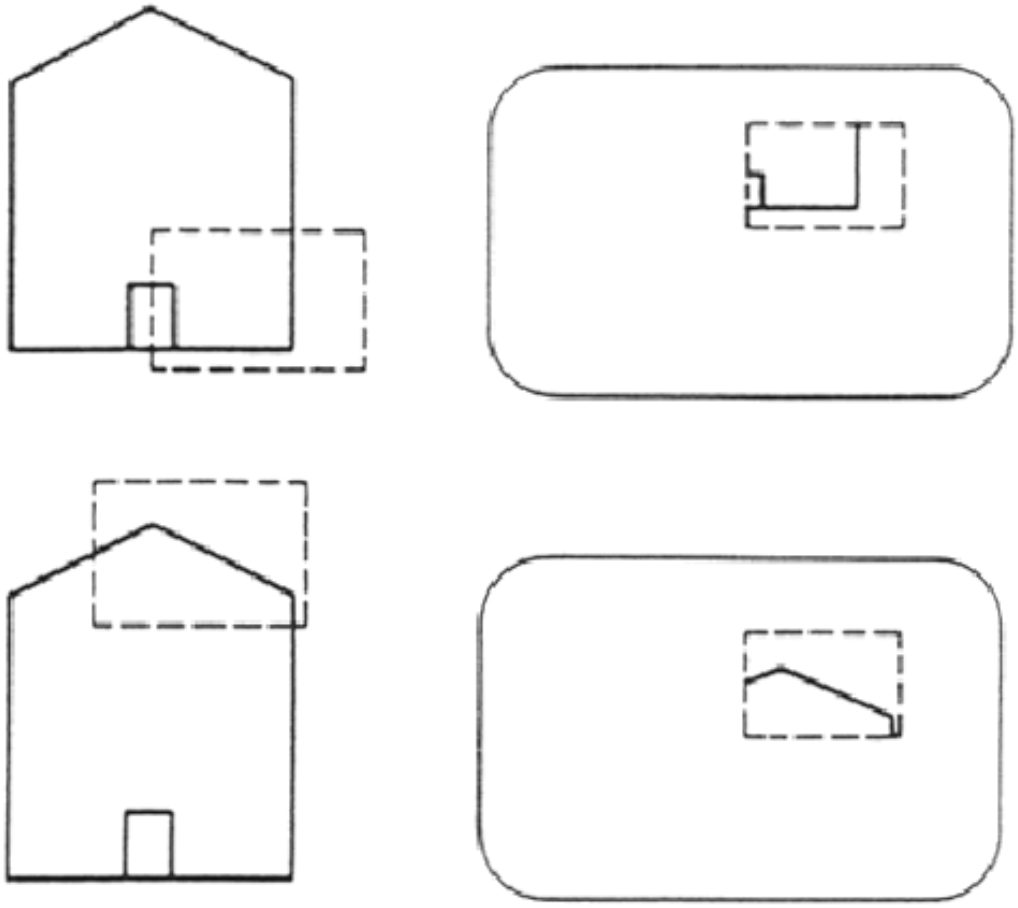
2.10 Window-Viewport

Begriffe

- Window:
  - Auch „View Window“ (⇒ erweitertes Setup Zentralprojektion)
  - Definiert Sichtfenster in der Bildebene
  - Definiert, welcher Teilbereich der Szene abgebildet werden soll
- Viewport:
  - Definiert Bildschirmbereich in dem der **Inhalt** eines Windows dargestellt werden soll

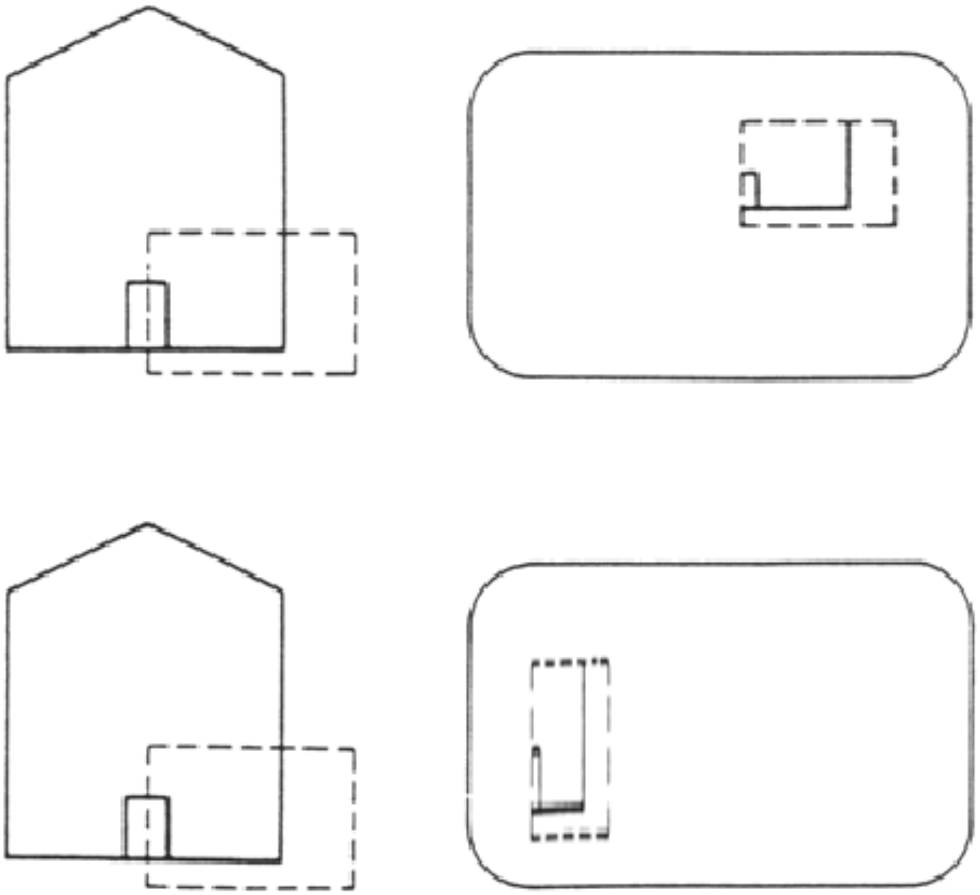
- Bem.: IdR. sind sowohl Window als auch Viewport an den Koordinatenachsen ausgerichtete rechteckige Gebiete.
- Die **Window-Viewport-Transformation** (Windowing Operation) setzt sich aus **elementaren Translationen und Skalierungen** zusammen.

2.10 Window-Viewport



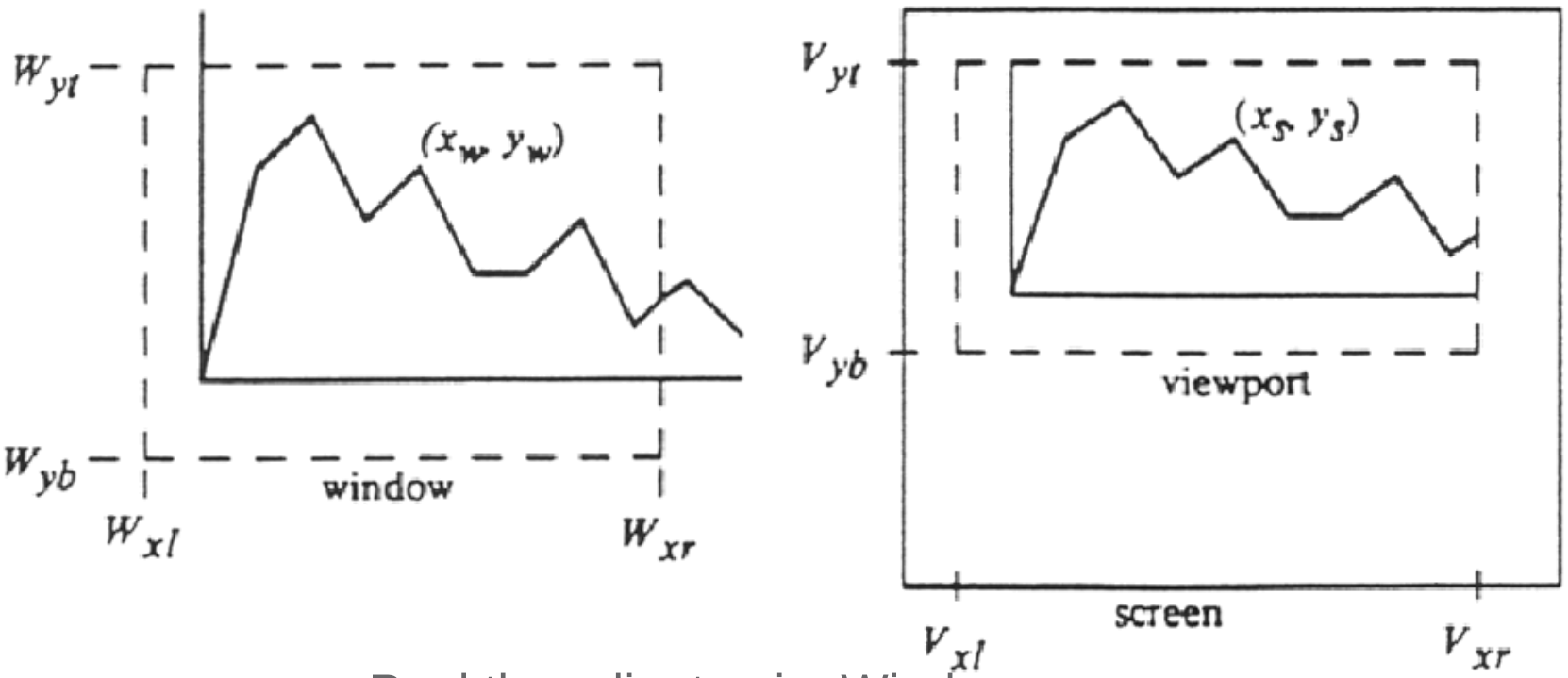
Verschiedene Fenster, dieselben Viewports

2.10 Window-Viewport



Dieselben Fenster, verschiedene Viewports

2.10 Window-Viewport



- x_W, y_W Punktkoordinaten im Window
- x_S, y_S Punktkoordinaten auf dem Bildschirm
- $W_{xl}, W_{xr}, W_{yb}, W_{yt}$ Koordinaten des Windows
- $V_{xl}, V_{xr}, V_{yb}, V_{yt}$ Koordinaten des Viewports im Bildschirmkoordinatensystem

Transformation in 3 Schritten

1) **Translation** in den Koordinatenursprung

$$x = x'_W - W_{xl}$$

$$y = y'_W - W_{yb}$$

2) **Skalierung** auf gewünschte Größe

$$x' = \frac{V_{xr} - V_{xl}}{W_{xr} - W_{xl}} x$$

$$y' = \frac{V_{yt} - V_{yb}}{W_{yt} - W_{yb}} y$$

3) **Translation** an gewünschte Stelle

$$x_S = x' + V_{xl}$$

$$y_S = y' + V_{yb}$$

Transformation in 3 Schritten (Fortsetzung)

Zusammenfassung zu

$$x_S = ax_W + b$$

$$y_S = cy_W + d$$

$$mit\ a := \frac{V_{xr} - V_{xl}}{W_{xr} - W_{xl}}, b := V_{xl} - aW_{xl}$$

$$und\ c := \frac{V_{yt} - V_{yb}}{W_{yt} - W_{yb}}, d := V_{yb} - cW_{yb}$$

$\Rightarrow$ Punkttransformation durch 2 Multiplikationen und zwei Additionen