Inhaltsverzeichnis

2.1 Koordinatentransformationen

- Grundlage der Bildgestaltung auf dem Bildschirm oder dem Ausgabegerät sind Koordinatentransformationen im IR^2 oder IR^3.
- Im Allgemeinen unterscheidet sich das Koordinatensystem eines Objektes von dem Koordinatensystem des Ausgabegerätes.
- Das Koordinatensystem des Objektes ist oft über geometrische Eigenschaften des Objektes festgelegt (z. B. ausgezeichnete Richtungen, Symmetrien).
- Das Koordinatensystem des Bildschirms oder die Größe der Bildfenster ist durch das Gerät selbst definiert (z. B. Nullpunkt in der linken, oberen Ecke, x- und y-Achsen parallel zu den Bildrändern).

2.1 Koordinatentransformationen

- Mit Hilfe von Koordinatentransformationen (Translationen, Skalierungen, Rotationen) wird das Objektsystem in das Gerätesystem transformiert.
- Generell setzen wir hier orthonormierte (kartesische) Koordinatensysteme voraus.
- Allgemeine Vorgehensweise bei der Koordinatentransformation:

(1) Bildschirm oder Ausgabegerät mit einem Koordinatensystem versehen

(2) Objekt mit einem Koordinatensystem versehen.

(3) Objekt- und Objektkoordinatensystem mittels Parallel- oder Zentralprojektion in Bildebene abbilden (IR3-Transformation).

2.2 Transf' in der Ebene

(4) Das Koordinatensystem des Bildschirms stimmt nun in der Regel nicht mit dem Bild des Objektsystems überein. Die notwendige „Anpassung“ erfolgt über eine weitere Koordinatentransformation (IR^2-Transformation).

- Gegeben seien im Folgenden die beiden Koordinatensysteme S (z. B. Gerätesystem) und S´ (z. B. Objektsystem) durch S:(0; x1, x2) und S´:(0´; x 1´, x 2´).

Translation (Verschiebung)

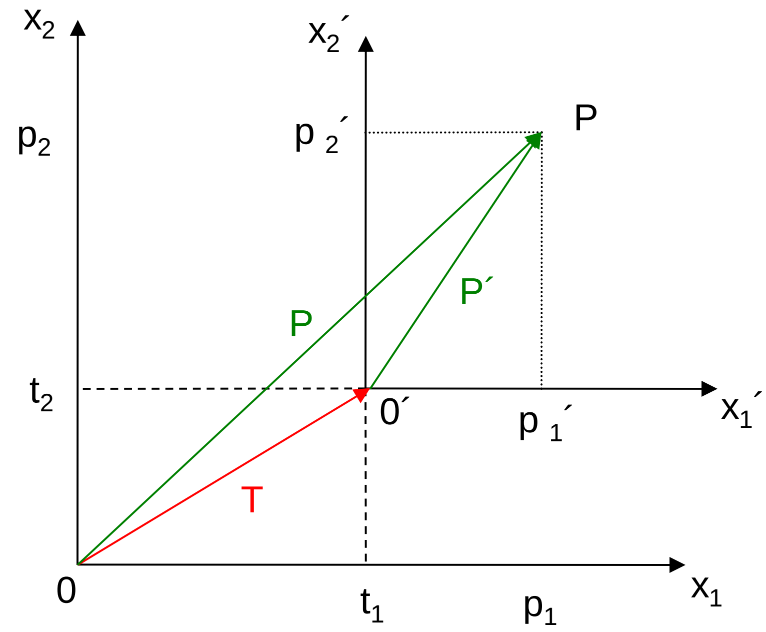
- Die einfachste Transformation zwischen dem System S´ und S ist eine Translation. Dabei wird vorausgesetzt, dass die beiden (gerichteten) Koordinatenachsen jeweils zueinander parallel sind.

Translation (Fortsetzung)

- Es gilt für den Punkt P:

  $p_1 = t_1 + p_1'$
  $p_2 = t_2 + p_2'$

  wobei (t_1, t_2) die Koordinaten des Ursprungs von S´ im System S sind. Der Punkt P hat also in S´ die Koordinaten (p_1', p_2') und in S die Koordinaten $(t_1 + p_1', t_2 + p_2')$.



- In Vektor-Schreibweise: kurz:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$$

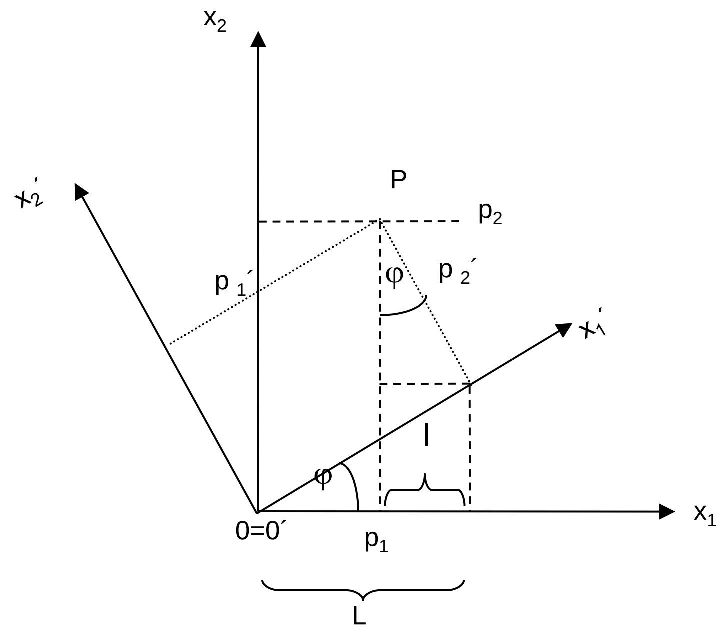
P = T + P'

Rotation (Drehung)

- Wir betrachten die Drehung eines Systems S´gegen das System S um den Winkel φ um den gemeinsamen Ursprung 0=0´:
- Es ist $l / p_2' = \sin\varphi \;\; und \;\; L / p_1' = \cos\varphi$

  also $p_1 = L - l = p_1' \cdot \cos\varphi - p_2' \cdot \sin\varphi$

  und (analog) $p_2 = p_1' \cdot \sin\varphi + p_2' \cdot \cos\varphi$



- In Vektor-Matrix-Schreibweise: P = R · P‘
- mit der (orthonormalen) Rotationsmatrix:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Bem.: *R* ist orthonormal gdw. $R^{-1} = R^T$

2.2 Transf' in der Ebene

Rotation (Fortsetzung)

- Bemerkung: Sichtweisen von $P = R \cdot P'$

  a) R transformiert die Koordinatendarstellung (p_1', p_2') des Punktes bezüglich des Systems S´ in die Koordinatendarstellung (p_1, p_2) bezüglich des Systems S.

  entspricht: (globales) Koordinatensystem S; auf die Koordinaten (p_1', p_2') des Punktes wirkt die Matrix R.

  „Punkt wird gedreht"

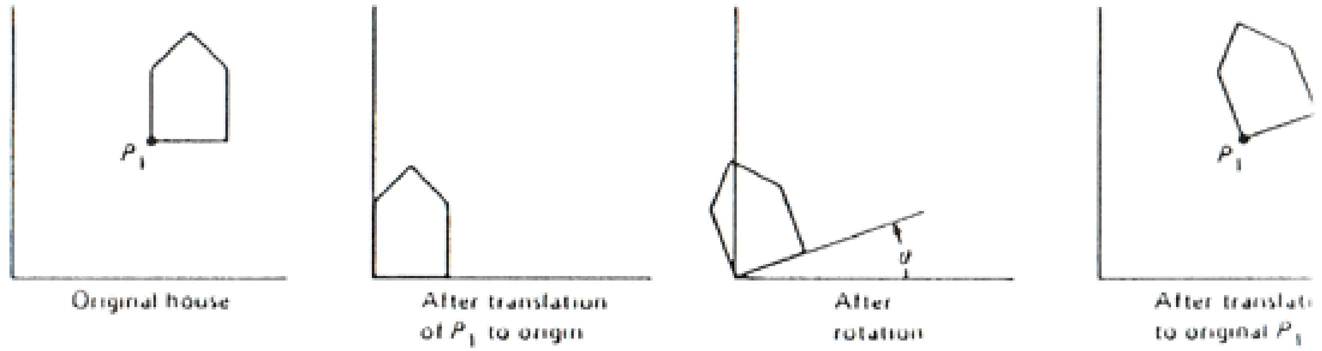
  b) (Lokales) Koordinatensystem S wird mit Matrix R (Rotation im mathematisch positiven Sinn um Winkel φ) transformiert; es resultiert ein (lokales) Koordinatensystem S´. Der Punkt wird dann bezüglich S´ (also mit den Koordinaten (p_1', p_2')) definiert.

  „Koordinatensystem wird gedreht"

Bem.: Gleiche Überlegungen gelten bei anderen Transformationen ebenso.

Rotation (Fortsetzung)

- Bei der Rotation um einen beliebigen Punkt P_1 müssen noch zwei Translationen hinzugenommen werden:
  (1) Translation von P_1 in den Ursprung
  (2) Rotation um den Ursprung
  (3) „Rücktranslation“ von P_1 in die ursprüngliche Position.



2.2 Transf’ in der Ebene

Rotation (Fortsetzung)

Bemerkung:

- Die Matrizenmultiplikation ist i. a. nicht kommutativ, d. h. $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Bei hintereinander geschalteten Rotationen muss also darauf geachtet werden, dass die Reihenfolge der Matrizen der Reihenfolge der Rotationen entspricht.

Skalierung (Scaling, Größenänderung)

- Soll das System S´ „vergrößert“ oder „verkleinert“ werden, so muss eine Skalierung durchgeführt werden:

$$p_1 = \lambda_1 \cdot p_1'$$

$$p_2 = \lambda_2 \cdot p_2'$$

- In Vektor-Matrix-Schreibweise: $P = \tilde{S} \cdot P'$

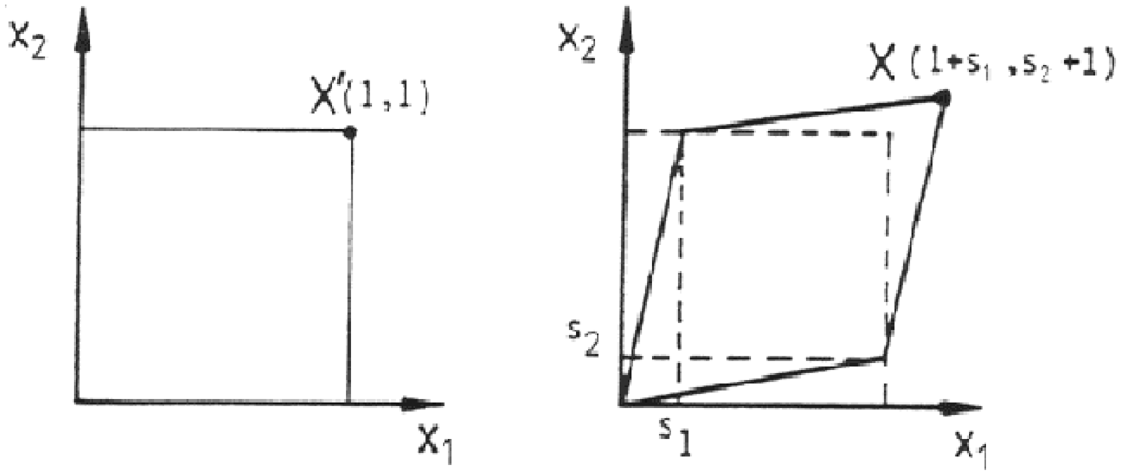
- mit der Skalierungsmatrix: $\tilde{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Scherung (Shear)

- Eine Scherung ergibt sich, wenn Abhängigkeiten folgender Form bestehen:

$$p_1 = p_1' + s_1 \cdot p_2'$$

$$p_2 = s_2 \cdot p_1' + p_2'$$



- In Vektor-Matrix-Schreibweise:

P = S · P'

- mit der Scherungsmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Einschub: Affine Transformationen

- Affine Transformationen lassen sich als Kombination einer linearen Abbildung und einer Translation schreiben:
  P = AP' + T
- Die bisher genannten Transformationen (Translation, Rotation, Skalierung, Scherung) sind Beispiele affiner Transformationen.

Affine Invarianz von Teilungsverhältnissen:

- Für eine affine Transformation F und die Punkte P und Q gilt immer:

$$F(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda F(P) + (1-\lambda)F(Q) \quad \text{für} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

2.2 Transf' in der Ebene

Einschub: Affine Transformationen (Frts)

- Diese Beziehung zeigt, dass das Bild einer Strecke (Strecke von Q nach P) unter einer affinen Abbildung F wieder eine Strecke ist, und dass Teilungsverhältnisse $\lambda : (1- \lambda)$ unter F invariant bleiben.
- Es genügt also, die Endpunkte Q und P auf der Strecke abzubilden. Zwischenpunkte erhält man durch Interpolation von F(Q) und F(P).
- Man beachte, dass unter affinen Abbildungen parallele Linien parallel bleiben.

2.2 Transf' in der Ebene

Einschub: Affine Transformationen (Frts)

weitere affine Transformationen:

- Reflektion an der Gerade y=x, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Reflektion an der Gerade y=-x, $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Reflektion an der x-Achse, $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Reflektion an der y-Achse, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Reflektion am Ursprung, $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Homogene Koordinaten

- Homogene Koordinaten entstammen der projektiven Geometrie. An dieser Stelle soll jedoch eine andere Motivation herhalten.
- Die Hintereinanderschaltung von Rotation, Translation und Skalierung führt auf die Abbildungsgleichung

$$P = \tilde{S} \cdot (T + R \cdot P')$$

- Müssen jedoch mehrere solcher Transformationen hintereinander ausgeführt werden, so stört die Addition in der obigen Gleichung.
- Da heutige Computergraphikhardware insbesondere auch Matrixmultiplikationen unterstützt, ist es günstig, Transformationen ausschließlich mittels Matrixmultiplikationen auszuführen, also:

$$P = M_n \cdot \cdots \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot P'$$

2.2 Transf’ in der Ebene

Homogene Koordinaten (Fortsetzung)

- Dies erreicht man durch folgenden Übergang auf die nächst höhere Dimension:
  - Das Tripel (x,y,w) $(w \neq 0)$ stellt die homogenen Koordinaten des Punktes $(x/w, y/w) \in IR^2$ dar.
  - Da es unendlich viele solcher Darstellungen desselben Punktes gibt, verwendet man die so genannte Standarddarstellung mit $w=1$.
  - Also besitzt ein Punkt $P=(x,y) \in IR^2$ als homogene Koordinaten $(x,y,1)$.

Bem.: Für Punkte im IR^3 gilt eine analoge Konstruktion.

Homogene Koordinaten (Fortsetzung)

- Dies erlaubt nun eine „neue“ Darstellung unserer Transformationen:
- Translation eines Punktes (x´,y´) um den Vektor (t_1,t_2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + t_1 \\ y' + t_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Rotation eines Punktes (x´,y´) um den Winkel φ:

$$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cdot cos\varphi - y' \cdot sin\varphi \\ x' \cdot sin\varphi + y' \cdot cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Transf' in der Ebene

Homogene Koordinaten (Fortsetzung)

- Skalierung eines Punktes (x´,y´) mit den Faktoren λ_1 und λ_2:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x' \\ \lambda_2 \cdot y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Rotation eines Punktes (x´,y´) um einen Punkt P_1 um den Winkel φ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & P_{1x} \\ 0 & 1 & P_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -P_{1x} \\ 0 & 1 & -P_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Transformationen im Raum

Translation

- Die Verschiebung eines Punktes (x´,y´,z´) um den Translationsvektor (t_x,t_y,t_z) ergibt den Punkt (x,y,z) mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T(t_x,t_y,t_z)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + t_x \\ y' + t_y \\ z' + t_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Transformationen im Raum

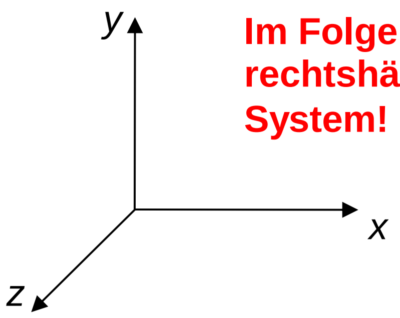
Skalierung

- Eine Skalierung mit den Faktoren s_1, s_2 und s_3 für die drei Achsenrichtungen hat die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \cdot x' \\ s_2 \cdot y' \\ s_3 \cdot z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Transformationen im Raum

Rotation



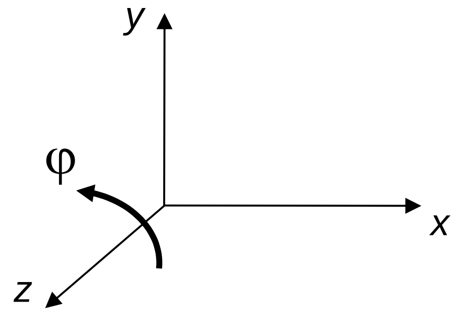
Im Folgenden: rechtshändiges System!

- Alle Rotationen erfolgen im mathematisch positiven Sinn (d. h. gegen den Uhrzeigersinn).
- Der Betrachter „sitzt“ dabei auf der positiven Rotationsachse und schaut in Richtung Ursprung des Koordinatensystems.
- Wir betrachten zuerst die Rotationen um einzelne Koordinatenachsen um den Winkel φ.

  $\Rightarrow$ Transformationsmatrizen $R_x(\varphi)$, $R_y(\varphi)$, $R_z(\varphi)$
- Wir verwenden die Sichtweise „**globales festes Koordinatensystem; Punkt wird transformiert (gedreht)**“.

2.3 Transformationen im Raum

Rotation um die z-Achse



- Die Rotation eines Punktes (x´,y´,z´) um die z-Achse um den Winkel φ ergibt den Punkt (x,y,z) mit

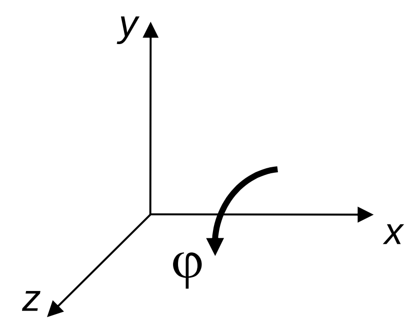
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_z(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi \\ x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Man beachte, dass eine Drehung um den Winkel φ um die z-Achse dem 2D-Fall entspricht, wobei die z-Koordinate konstant bleibt.

2.3 Transformationen im Raum

Rotation um die x-Achse

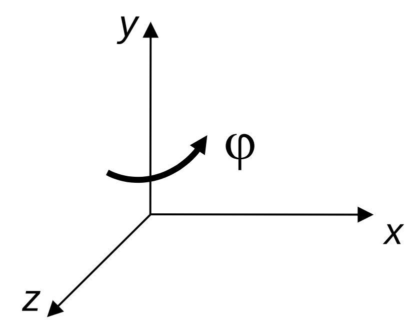
- Die Rotation eines Punktes (x´,y´,z´) um die x-Achse um den Winkel φ ergibt den Punkt (x,y,z) mit



$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \cdot \cos\varphi - z' \cdot \sin\varphi \\ y' \cdot \sin\varphi + z' \cdot \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Hier bleibt die x-Komponente der Koordinaten konstant, so dass die Einschränkung auf eine (y,z)-Ebene dem 2D-Fall entspricht.

Rotation um die y-Achse



- Die Rotation eines Punktes (x´,y´,z´) um die y-Achse um den Winkel φ ergibt den Punkt (x,y,z) mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_y(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cdot \cos\varphi + z' \cdot \sin\varphi \\ y' \\ -x' \cdot \sin\varphi + z' \cdot \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

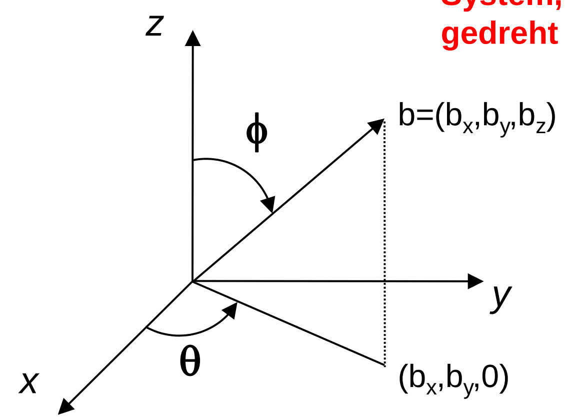
- Hier bleibt die y-Komponente der Koordinaten konstant, so dass die Einschränkung auf eine (z,x)-Ebene dem 2D-Fall entspricht.

2.3 Transformationen im Raum

Bem.: immer noch rechtshändiges System, hier nur gedreht

Rotation um eine beliebige Achse

- Jede Rotation um eine beliebige Achse kann aus Rotationen um die einzelnen Koordinatenachsen zusammengesetzt werden (⇒ Euler).
- Wir entwickeln nun die Rotation $R_G(\alpha)$ für die Drehung eines Punktes P um eine beliebig orientierte Achse G im Raum um einen Winkel α.



$$b_x = \sin\varphi \quad \cos\theta$$

$$b_y = \sin\varphi \quad \sin\theta$$

$$b_z = \cos\varphi$$

- Zuerst betrachten wir den Sonderfall, bei dem die Drehachse G durch den Ursprung geht und von einem Vektor b ($b=(b_x,by,bz)$ mit $||b||=1$) generiert wird, also G : $\lambda\cdot b$□($\lambda \in$ IR) .

Rotation um eine beliebige Achse (Frts)

- Gesucht sind nun die Koordinaten eines Punktes P nach einer Drehung um die Achse G um den Winkel α.

- Vorgehensweise:
  Der Punkt P wird so transformiert, das die Drehachse mit der z-Achse zusammenfällt. Anschließend wird für die Drehung um α die Rotationsmatrix $R_z(\alpha)$ verwendet. Hinterher werden die „Hilfstransformationen" wieder rückgängig gemacht.

  (Bem.: Ist G mit der z-Achse identisch, so entfallen die Hilfstransformationen)

- Man geht in mehreren Teilschritten vor.

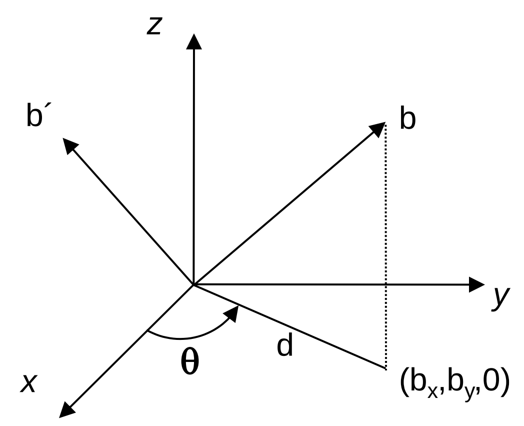
2.3 Transformationen im Raum

Rotation um eine beliebige Achse (Frts)

Schritt 1:

- Zunächst dreht man so, dass der Vektor b in die (z,x)-Ebene gedreht wird (b´). Aus P entsteht dabei P´ mit P´= $R_z(-\theta)$ P, wobei

$$R_z(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_x & b_y & 0 & 0 \\ -b_y & b_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$



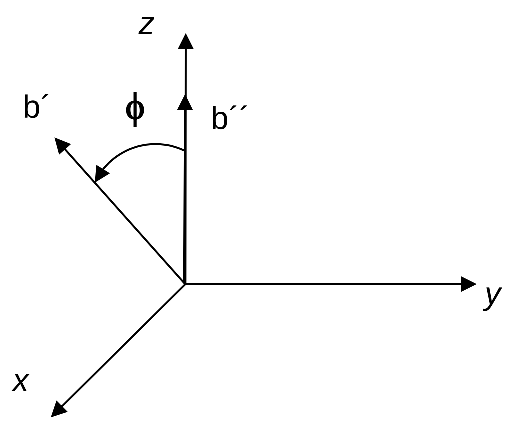
$$d^2 = b_x^2 + b_y^2$$

Rotation um eine beliebige Achse (Frts)

Schritt 2:

- Dann dreht man so, dass der Vektor b´ mit der z-Achse zusammenfällt (b´´). Aus P´ entsteht dabei P´´ mit P´´= $R_y(-\phi)$ P´, wobei

$$R_y(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_z & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



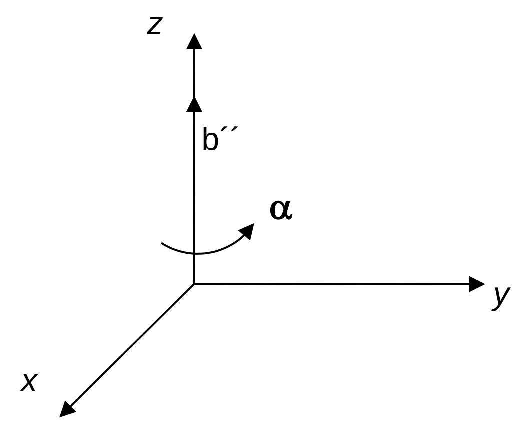
2.3 Transformationen im Raum

Rotation um eine beliebige Achse (Frts)

Schritt 3:

- Man dreht nun um den Winkel α um die z-Achse. Aus P´´ entsteht dabei P´´´ mit P´´´= $R_z(\alpha)$ P´´, wobei

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rotation um eine beliebige Achse (Frts)

Schritte 4 und 5:

- Zum Schluss werden die Rotationen aus den Schritten 1 und 2 in umgekehrter Reihenfolge rückgängig gemacht. Aus P´´´ entsteht dabei der gewünschte „gedrehte“ Punkt Q des ursprünglichen Punktes P mittels Q= $R_z(\theta)\, R_y(\phi)$ P´´´, wobei

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} b_z & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_z(\theta) = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_x & -b_y & 0 & 0 \\ b_y & b_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Rotation um eine beliebige Achse (Frts)

Ergebnis:

- Die Gesamttransformation lässt sich in einem Schritt durch die Verknüpfung aller Transformationen realisieren:

  $M_b(\alpha) = R_z(\theta)\ R_y(\phi)\ R_z(\alpha)\ R_y(-\phi)\ R_z(-\theta)$

Allgemeiner Fall:

- Ist die Drehachse eine allgemeine Gerade

  $G: a + \lambda \cdot b \quad (\lambda \in IR, ||b||=1, a=(a_x,a_y,a_z))$

- so ist vor Schritt 1 und nach Schritt 5 eine entsprechende Translation einzuschieben, also

  $M_G(\alpha) = T(a_x,a_y,a_z)\ R_z(\theta)\ R_y(\phi)\ R_z(\alpha)\ R_y(-\phi)\ R_z(-\theta)\ T(-a_x,-a_y,-a_z)$