2. Hauptteil: Das graziöse Nummerieren von Bäumen

Bis heute ist noch unklar, ob es möglich ist, jeden beliebigen Baum graziös zu nummerieren. Das bedeutet, man konnte weder beweisen, dass man für jeden Baum eine solche Nummerierung finden kann, noch wurde ein Beispielbaum gefunden, den man nicht graziös nummerieren kann. Allerdings gibt es bestimmte Gruppen von Bäumen für die man einen Algorithmus für die graziöse Nummerierung gefunden hat. Solche Gruppen von Bäumen und die Algorithmen werde ich im folgendem vorstellen.

2.1. Raupen

Raupen sind eine Untergruppe von Bäumen. Für diese kleine Gruppe kann man einen Algorithmus für das graziöse Nummerieren angeben. Aber was sind eigentlich Raupen? Auch vor diesen Begriff muss ich einige andere Definitionen Stellen.

Blatt: Als Blatt bezeichnet man einen Knoten vom Grad 1 und die eine in diesem Knoten endende Kante.

Pfad: Ein Pfad ist ein unverzweigter Weg.

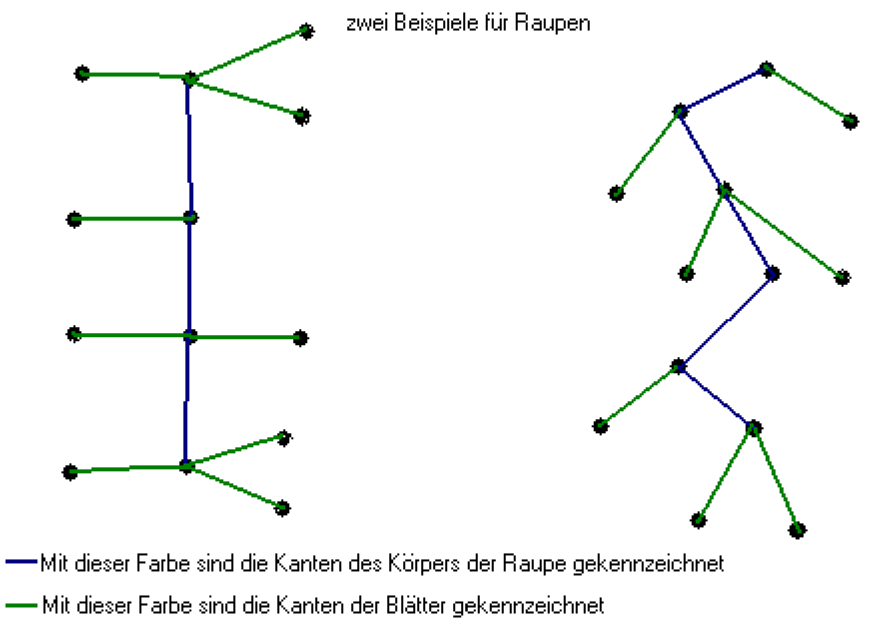
Raupe: Eine Raupe ist ein Baum bei dem nach dem Löschen aller Blätter nur noch ein Pfad übrig bleibt. (diesen Pfad bezeichnet man als Körper der Raupe)

Auch der Begriff des Abstandes zwischen 2 Knoten ist sehr wichtig:

Def.: Als Abstand zwischen 2 Knoten bezeichnet man die Länge des Weges zwischen ihnen.

Diese Definition ist nur bei Bäumen anzuwenden, da es bei allen anderen Graphen die Möglichkeit gibt, dass 2 Wege verschiedener Länge zwischen den beiden Knoten existieren. Bei einem Baum ist dies nicht möglich, da man sonst die beiden Wege einfach aneinandersetzen kann und dabei ein Kreis entsteht (wird eine Kante zweimal hintereinander durchlaufen, so wäre das ganze kein Weg und somit kein Kreis, aber man kann diese Kante einfach aus dem Weg entfernen, dieser Weg wird dadurch nicht unterbrochen und es entsteht ein Kreis), was der Definition eines Baumes wiederspricht.

Bsp.:

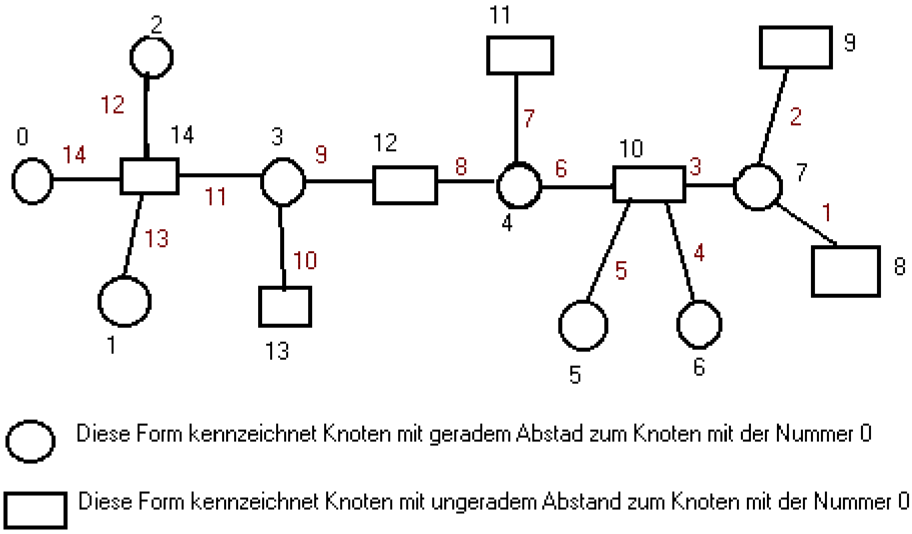


Satz 2: Man kann jede Raupe graziös nummerieren.

Beweis:

Hierzu existiert ein Algorithmus, nach dem man jede Raupe graziös färben kann. Dieser Algorithmus ist folgender: Man beginnt an einem Knoten am Ende des Körpers der Raupe (d.h. an einem Knoten mit dem Grad 1). Diesem Knoten ordnet man die Zahl 0 zu. Mit den nächstgrößeren Zahlen (1,2,3...) werden die Knoten mit geradem Abstand zum Knoten mit der Nummer 0 nummeriert. Die Nummer 1 bekommt der Knoten mit dem niedrigstem ungeraden Abstand zum Knoten mit der Nummer 0, die 2 der mit dem zweitniedrigsten Abstand usw. Haben zwei Knoten denselben Abstand zum Knoten 0, so werden immer die zuerst nummeriert, die kein Teil des Körpers sind (bei ihnen ist die Reihenfolge dann egal). Bei den Knoten mit geradem Abstand zum Knoten mit der Nummer 0 tut man dasselbe mit dem gleichen Algorithmus, nur dass man mit der höchsten Zahl, also der Kantenanzahl, beginnt und immer kleiner wird.

Bsp.:



Beweis, dass man auf diese Weise immer eine graziöse Nummerierung erhält:
Zunächst zeige ich, dass die Nummern, die den Kanten zugeordnet werden mit zunehmendem Abstand (Abstand einer Kante zum Knoten mit der Nummer 0 sei der des Knotens der Kante, der näher am Knoten 0 liegt) vom Knoten mit der Nummer 0 immer kleiner werden. Eine Kante verbindet immer einen Knoten mit geradem Abstand zum Knoten mit der Nummer 0 mit einem Knoten mit ungeradem Abstand zu diesem Knoten. Entfernt man sich weiter vom Knoten mit der Nummer 0 so wird die Zahl im Knoten mit ungeradem Abstand kleiner, und die bei dem mit geradem Abstand größer (oder wenigstens eins von beidem), außerdem ist die Zahl des Knotens mit ungeradem Abstand immer größer als die andere (ergibt sich aus der Konstruktionsvorschrift). Somit ziehe ich von einer kleineren Zahl als zuvor einen größeren Betrag als vorher ab (eventuell gilt auch nur eines von beidem, die Konsequenz ist aber dieselbe), ich erhalte also für die Kante eine kleinere Zahl als zuvor. Auch können zwei Kanten, die im gleichen Abstand zum Knoten mit der Nummer 0 liegen nicht die gleiche Nummer haben. Dies ist so, da diese Kanten immer einen Knoten gemeinsam haben müssen (der mit dem kleineren Abstand zum Knoten mit der Nummer 0 muss immer auf dem Körper liegen und es gibt keine zwei verschiedenen Knoten mit dem gleichen Abstand zum Knoten 0, die auf dem Körper liegen (laut Definition des Körpers)). Und da der Knoten auch nicht mit 2 Knoten mit derselben Nummer verbunden sein kann (nach dem Algorithmus). Somit werden die Nummern der Kanten in einer Richtung immer kleiner. Da keine Kantennummern

zweimal auftreten muss von der größtmöglichen bis zur 1 alles vorhanden sein. Somit erfüllt die Nummerierung alle 2 Kriterien der graziösen Nummerierung von Bäumen.   W.z.b.w.

2.2. Mögliche Ansätze, um zu beweisen, dass alle Bäume graziös nummerierbar sind

Da es eine Vielzahl von Bäumen gibt, ist es schwer diesen Beweis zu führen (weswegen er wohl auch noch nicht gefunden wurde). Die Methode, die aber noch am erfolgversprechensten aussieht, ist die eines konstruktiven Beweises. Hierbei versucht man aus der Nummerierung eines oder mehrerer bestimmten Graphen die eines anderen mit mehr Knoten zu finden. Die daraus entstehende Konstruktionsvorschrift soll aus einem (oder mehreren) Ausgangsgraphen mit ihren graziösen Nummerierungen die graziösen Nummerierungen aller anderen Bäume finden.

2.2.1. Ein erster Versuch der Konstruktion

Als erstes hat man bei einer solchen Konstruktion natürlich die Idee an einen beliebigen Knoten eine Kante und am Ende einen neuen Knoten anzufügen und den neuen Graphen dann aus der alten Nummerierung heraus graziös zu nummerieren. Wäre dies möglich, so könnte man nach folgender Induktion alle Bäume graziös nummerieren.
IA: Für einen Baum, der nur aus einer Kante und 2 Knoten besteht, gibt es eine graziöse Nummerierung (Knotennummern: 0 und 1, Kantennummer:1-0=1)
IV: Für jeden Baum mit n Knoten gibt es eine graziöse Nummerierung.
IBeh.: Für jeden Baum mit n+1 Knoten gibt es eine graziöse Nummerierung.
IBew.:Man wählt sich zuerst einen beliebigen Baum mit n+1 Knoten. Nach Hilfssatz 1 (Einleitung) hat dieser Baum mindestens einen Knoten, an dem nur eine Kante anliegt. Diesen Knoten und die eine Kante entfernt man und man erhält einen Graphen mit n Knoten, den man nach IV graziös nummerieren kann. Nun sind wir davon ausgegangen, dass ich an diesen Baum an einen beliebigen Knoten eine Kante und einen neuen Knoten anfügen kann und den neuen Graphen dann nach einem bestimmten Algorithmus graziös nummerieren kann. Man fügt also die zuvor entfernte Kante und den Knoten wieder an und kann nach dem Algorithmus den Baum mit n+1 Knoten (also jeden Baum mit n+1 Knoten) graziös nummerieren. w.z.b.w.

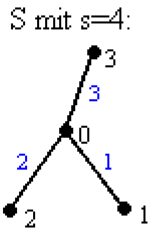
Nun stellt sich nur noch die Frage, wie eine solche Konstruktionsvorschrift aussehen soll. Fakt ist, dass bis heute noch niemand eine solche gefunden hat. Aber Ideen gab es schon einige. So zum Beispiel, dass man den ursprünglichen Baum so umnummeriert, dass an dem Knoten, an dem die neue Kante angefügt wird, eine Null steht, die Nummerierung aber dennoch graziös ist. Nehmen wir an, der ursprüngliche Graph hatte n Knoten. Den Kanten waren also alle Werte zwischen 1 und n-1 (Kantenanzahl) (genau einmal) und den Knoten alle zwischen 0 und n-1 (genau einmal) zugeordnet. Man gibt dem neuen Knoten die Nummer n. Der neue Graph hat nun n+1 Knoten und diesen sind danach alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und n (genau einmal) zugeordnet (von 0 bis n-1 schon von der ursprünglichen Nummerierung, n kommt hinzu). Die neue Kante hat also den Wert n-0=n, d.h. den Kanten sind alle Werte zwischen 1 und n (genau einmal) zugeordnet (Es existieren n+1-1=n Kanten)(von 1 bis n-1 schon vorher und n kam hinzu). Dies zusammen würde bedeuten, dass der Baum mit n+1 Knoten graziös nummeriert ist. Eine Konstruktionsvorschrift wäre gefunden. Aber der Haken ist, dass man die Null in einer graziösen Nummerierung nicht bei jedem Graph an jede Stelle bekommen kann.

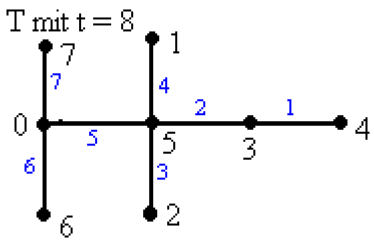
Eine ähnliche Methode wäre, einen Baum mit n Knoten zu nehmen, ihn so graziös umzunummerieren, dass dem Knoten, an dem die neue Kante angefügt werden soll, die Zahl n zugeordnet ist. Dem neuen Knoten weist man die Nummer 0 zu, allen anderen eine Nummer höher, als sie in der ursprünglichen Nummerierung hatten. Auf diese Weise würde eine graziöse Nummerierung entstehen.
Beweis: Ursprünglich waren den Knoten alle Werte zwischen 0 und n-1 (Kantenanzahl) genau einmal zugewiesen (da die Nummerierung graziös war). Nach dem Algorithmus werden aus diesen Nummern die Werte von 1 bis n (immer eins addiert) und hinzu kommt die 0 des neuen Knotens. Bei der neuen Nummerierung werden den Kanten also alle Werte zwischen 0 und n (=Kantenanzahl) (genau einmal) zugeordnet.
In der ursprünglichen Nummerierung hatten die Kanten alle Werte zwischen 1 und n-1 (genau einmal). Wenn zu allen Knotenwerten 1 addiert wird, so bleiben die Differenzen zweier solcher Werte gleich [x-y=x+1-(y+1) =x-y+1-1], d.h. die Kantenwerte bleiben gleich und nur der Wert der neuen Kante (n (höchste Zahl der Knoten)-0=n) kommt hinzu. Die Kanten nehmen also alle Werte zwischen 1 und n (Kantenanzahl) genau einmal an. Somit sind alle Eigenschaften einer graziösen Nummerierung erfüllt und eine Konstruktionsvorschrift wäre gefunden.
Aber auch hier geht das nicht so einfach. Es ist nämlich nicht möglich in jedem Baum die Nummerierung so zu ändern, dass sie graziös bleibt und in jedem beliebigen Punkt die höchste Zahl hat.

2.2.2. Ein zweiter Versuch der Konstruktion

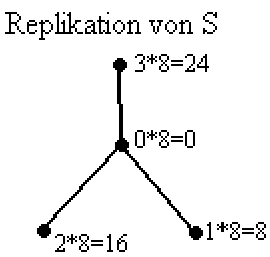
Im folgenden werde ich eine Methode vorstellen, bei der man ebenfalls versucht aus graziös nummerierten Bäumen eine Nummerierung für Bäume mit mehr Knoten zu finden. Im Gegensatz zum obigen Versuch, funktioniert hier die Konstruktion, aber es werden von dieser nicht alle Bäume erfasst. Diese Methode werde ich der Anschaulichkeit wegen gleich an einem Beispiel demonstrieren.

Als Ausgangspunkt wählt man sich 2 Bäume (S mit s Knoten und T mit t Knoten), die schon graziös nummeriert sind, wie z.B.:

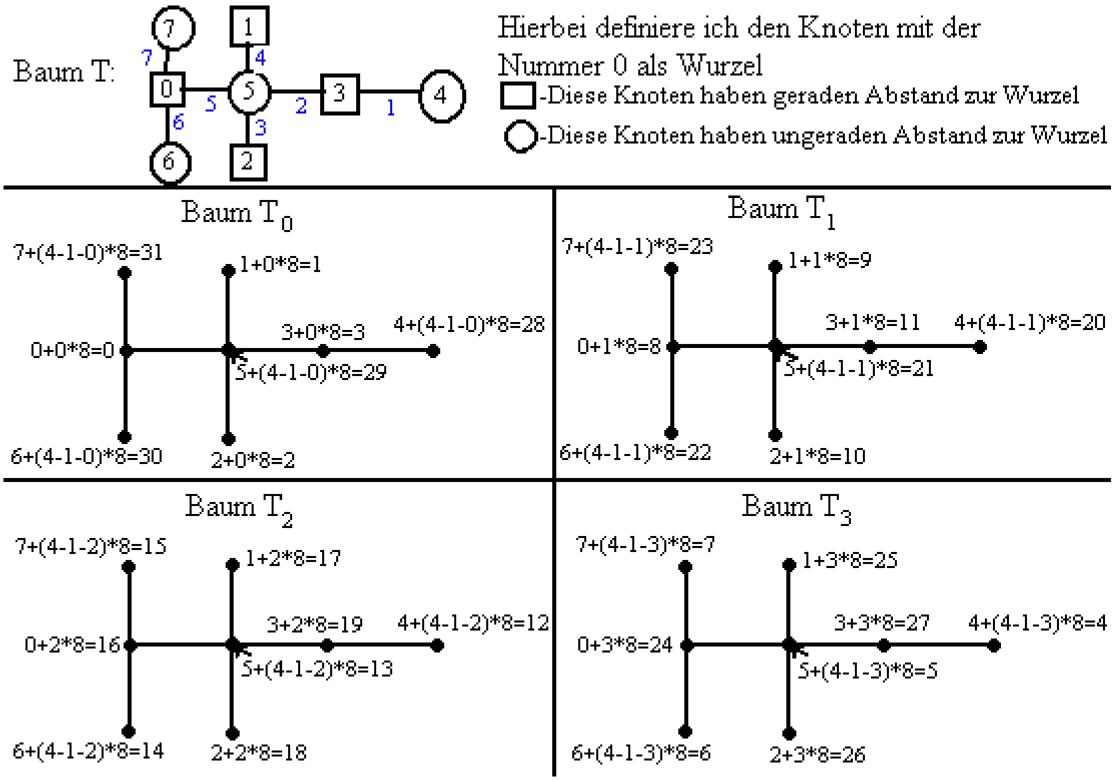




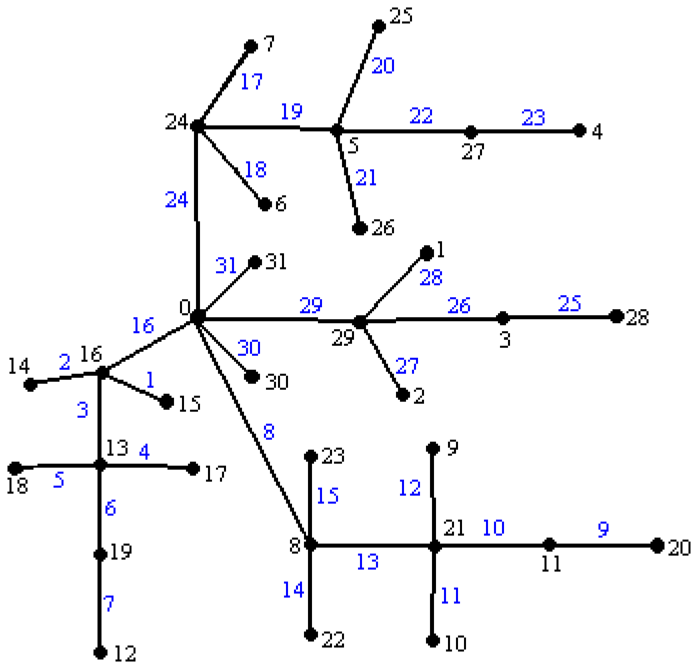
Nun erzeugt man eine Replikation von S (diese sei S_0), indem man den Graphen beibehält und jede Knotennummer mit t (in meinem Beispiel also mit 8 multipliziert). Es entsteht ein nicht mehr graziös nummerierter Baum:



Weiterhin erzeugt man s Replikationen von T (T_0,T_1,...,T_{s-1}) (Auch hier wird der Graph an sich beibehalten). Hierzu wählt man zunächst einen beliebigen Knoten von T aus (dieser heißt die Wurzel). In der i-ten Replikation T_i nummeriert man nun die Knoten folgendermaßen: Hat ein Knoten z von der Wurzel einen geraden Abstand so wird zu der Nummer, die z in T hatte, genau iEt addiert. Hat ein Knoten z einen ungeraden Abstand zur Wurzel, so wird zu der Nummer, die z in T hatte genau (s-1-i)Et addiert. In meinem Beispiel würden auf diese Weise folgende nicht graziöse Nummerierungen entstehen:



Als letzten Schritt fügt man alle entstandenen Bäume mit ihren Nummerierungen zusammen, d.h. man verbindet die Knoten in den Replikationen von T, deren Nummern auch bei Knoten von S_0 auftreten, so mit Kanten, wie die zugehörigen Knoten in S_0 mit Kanten verbunden sind. In meinem Beispiel würde also folgender Baum mit seiner graziösen Nummerierung entstehen:



In diesem Beispiel sieht man, dass der Algorithmus einen graziös nummerierten Baum entstehen lässt, dass dies aber immer so ist, muss noch gezeigt werden.

Die Anzahl der Knoten entspricht der Anzahl aller Knoten in allen Replikationen von T (da beim Zusammensetzen von S_0 und diesen Replikationen nur Kanten von S_0 zu den Knoten der T_i hinzugefügt wurden). Die Knotenanzahl von T_i ist gleich der von T (da nur die Nummern verändert wurden), also t und es existieren laut Algorithmus s Replikationen T_i. D.h. der entstehende Graph hat insgesamt sEt Knoten. Um zu zeigen, dass er graziös ist, muss also gezeigt werden , dass:

1. Ein Baum entsteht,
2. Alle Nummern von 0 bis sEt-1 (Knotenanzahl-1=Kantenanzahl) den Knoten genau einmal zugeordnet sind und
3. Alle Nummern von 1 bis sEt-1 den Kanten genau einmal zugeordnet sind.

Zu 1.: Die Knoten, die am Ende durch die Kanten von S_0 verbunden werden haben laut Algorithmus die Nummern yEt, wobei 0PyPs-1 (1. Schritt der Konstruktion). In den Replikationen von T sind diese Nummern genau den Knoten zugeordnet, die Replikationen des Knotens mit der Nummer 0 sind (denn diese haben nach dem oben beschriebenen Algorithmus die Form 0+yEt=yEt). Da sie alle Replikationen eines Punktes sind, müssen sie auf verschiedenen Replikationen T_i liegen. Das bedeutet in einer Replikation werden am Ende nur an einem Knoten Kanten angefügt. T war ein Baum und hatte keine Kreise, d.h. in keiner der Replikationen von T treten Kreise auf, und da die Replikationen nur an einem Knoten (pro T_i) verbunden sind, könnten Kreise nur innerhalb der am Ende hinzugefügten Verbindungen (letzter Schritt der Konstruktion) entstehen (Denn andere Kreise müssten von dem Verbindungsknoten in die jeweilige Kopie und wieder zurücklaufen (da die Replikationen nur an diesem einen Knoten verbunden sind), was mangels eines Kreises nicht geht). Die am Ende hinzugekommenen Kanten stammen aber von einer Replikation von S, einem Baum, in ihnen gibt es also auch keine Kreise. Das bedeutet im gesamten Graph können keine Kreise existieren, er ist also ein Baum. W.z.b.w.

Zu 2.:

Man muss hier nur die Knoten von T und ihre Replikationen betrachten, da auch nach der Konstruktion nur diese Knoten und die beim letzten Konstruktionsschritt angefügten Kanten da sind (siehe oben). Zu jeder Nummer eines Knotens mit geradem Abstand zur Wurzel wird ja tEi addiert, wobei 0PiPs-1, zu jeder Nummer eines Knotens mit ungeradem Abstand zur Wurzel wird laut Algorithmus (s-1-i)Et addiert, wobei 0PiPs-1. Ist eine solche Bedingung gegeben kann der Term s-1-t nur Werte zwischen 0 und s-1 annehmen, es gilt also auch 0Ps-1-iPs-1 (ich denke dies ist ersichtlich). Dies bedeutet, man addiert zu allen Nummern dieselben Zahlen (tEy, wobei 0PyPs-1, jede genau einmal), nur in verschiedener Reihenfolge. Zu Beginn ist T graziös nummeriert, d.h. jede Nummer zwischen 0 und t-1 (Anzahl der Kanten) tritt genau einmal auf. Das heißt, sie lassen auch bei der Division durch t verschiedene Reste. Addiert man nun zu zwei verschiedenen Zahlen beliebige tEy, so bleiben die Restklassen erhalten (da tEy ∴ 0 (t)), was bedeutet, dass die beiden entstehenden Zahlen verschiedene Restklassen haben und somit auch verschieden sind. D.h. Replikationen verschiedener Knoten können nicht dieselbe Nummer haben. Zu jeder Zahl addiert man ja jedes tEy nur einmal, was bedeutet, auch die Replikationen eines Punktes können nie dieselbe Nummer haben. Aus den letzten beiden Aussagen ergibt sich, dass jeder Knoten im entstehenden Graphen eine andere Nummer hat. Der kleinste Wert ist hierbei 0+0Et=0 (an beiden variablen Stellen der kleinste Wert) und der größte (t-1)+tE(s-1)=t-1+tEs-t=tEs-1 (an beiden variablen Stellen der größte Wert). Da zwischen diesen Zahlen (eingeschlossen 0 und tEs-1) genau tEs Werte liegen, es genau so viele Knoten gibt, und jeder Wert maximal einmal auftreten kann, sind alle Werte zwischen 0 und tEs-1 den Knoten genau einmal zugeordnet.

W.z.b.w.

Zu 3.:

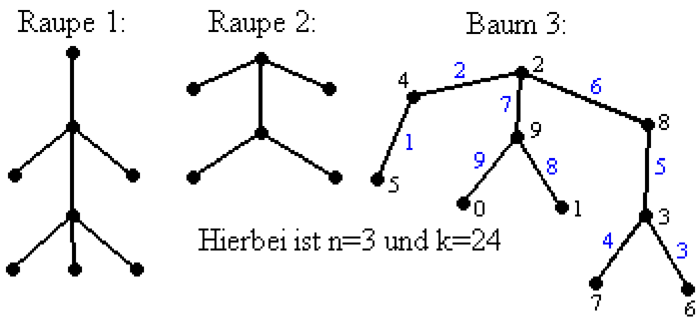
Durch Kanten ist immer ein Knoten mit geradem Abstand zur Wurzel und einer mit ungeradem Abstand zur Wurzel miteinander verbunden. Dies ist anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass es immer nur einen Weg von der Wurzel zu einem Punkt gibt (sonst würde ein Kreis entstehen, wenn man auf dem einen Weg hin und auf dem anderen zurück geht). Hat also ein Punkt geraden Abstand zur Wurzel, so hat der im Weg davor liegende (mit dem der Punkt verbunden ist) eine Kante weniger im Weg, also ungeraden Abstand und der nächste Knoten (wenn man den Weg um eine Kante verlängert), eine Kante mehr im Weg, also ebenfalls ungeraden Abstand (analoger Schluss für Knoten mit ungeradem Abstand). Betrachten wir nun zwei durch eine Kante verbundene Knoten, die in der Ausgangsnummerierung die Nummern a und b hatten. O.b.d.A. sei a>b, womit a-b der Nummer der Kante in der Ausgansnummerierung entspricht. Diese Kante hat also in T_i die Nummer: |a+t(s-1-i)-b-tEi| oder |a+tEi-b-t(s-1-i)|, also die Nummer: |a-bΓt(s-1-i)HtEi|=|a-bΓt(s-1-2i)|. a-b nimmt in der Ausgangsnummerierung alle Werte zwischen 1 und t-1 genau einmal an (da T graziös nummeriert war). 2 Kopien derselben Kante können nicht dieselben Nummern zugeordnet werden. Bleibt die Zahl in den Beträgen größer als 0, so ist dies klar, da jedes i nur einmal verwendet wird, und somit nie 2 gleiche Zahlen herauskommen können. 2 Werte (zwischen den Beträgen) unterscheiden sich nach der Formel nur durch ein Vielfaches von t, werden diese Werte negativ, so ändert sich bei den Beträgen die Restklasse bei der Division durch t. Dies wäre nur nicht der Fall, wenn der Wert irgendwann 0 würde, was aber nicht eintreten kann, da dann a-b ein vielfaches von t sein müsste, was aber unmöglich ist, da a-b zwischen 1 und t-1 liegt (durch die graziöse Färbung). Da die Werte von a-b von Anfang an verschiedenen Restklassen angehörten, sind Kopien von verschiedenen Kante auch nach der Rechnung noch in verschiedenen Restklassen (die werden nicht verändert). So sind weder die Kopien verschiedener Kanten, noch die einer Kante gleich, 2 verschiedene Kanten haben also am Ende verschiedene Werte. Da die Kantenzahlen nicht größer als die höchste Knotenzahl werden können sind sie alle zwischen 1 und sEt-1, dass sind sEt-1 Ziffern und genauso viele Kanten sind in dem entstehendem Baum. D.h. alle Ziffern zwischen 1 und sEt-1 sind den Kanten genau einmal zugeordnet. w.z.b.w.

Auf diese Weise kann man zwar beliebig große Bäume mit beliebig vielen Knoten und ihre graziöse Nummerierung konstruieren, aber nicht alle Bäume sind so aufgebaut, dass man sie auf diese Weise zusammensetzen kann. Also kann auch diese Konstruktion nicht beweisen, dass das graziöse Färben jedes Baumes möglich ist.

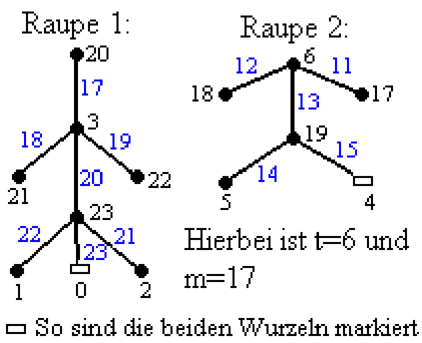
2.2.3. Ein dritter Versuch des Konstruierens einer graziösen Nummerierung aller Bäume

Auch hier kann man aus kleinen Bäumen größere erzeugen, aber nicht alle Bäume durch die Konstruktion abdecken.

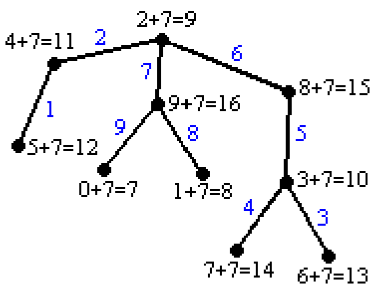
Als Ausgangspunkt wählt man sich beliebig viele Bäume (die Anzahl dieser sei n). Mindestens n-1 von diesen Bäumen seien dabei Raupen, d.h. höchstens ein Baum ist keine Raupe und dieser eine Baum muss bereits graziös nummeriert sein (ist auch dieser Baum eine Raupe, so kann man die Nummerierung wie unter 2.1. gezeigt erzeugen). Die gesamte Anzahl der Knoten soll k betragen. Beispielsweise könnte man also folgende Bäume wählen:



Nun beginnt man mit der Nummerierung der ersten Raupe, man wählt sich einen Knoten am Ende des Körpers oder am Ende eines vom Körperende ausgehenden Blattes als Wurzel. Dann nummeriert man alle Knoten mit geradem Abstand zur Wurzel aufsteigend mit den kleinsten Werten (0,1,2...), wobei näherliegende (Knoten mit geringerem Abstand zur Wurzel) zuerst nummeriert werden und bei gleichem Anstand die auf dem Körper liegenden die größten Zahlen zugeordnet bekommen. Die Knoten mit ungeradem Abstand zur Wurzel werden in derselben Reihenfolge jedoch beginnend mit der größten Zahl und dann fallend (k-1,k-2,k-3,...) nummeriert. Bei den weiteren Raupen wird genauso verfahren, nur dass man bei den Konten mit geradem Abstand zur Wurzel mit der kleinsten noch nicht in anderen Raupen verwendeten Nummer, und bei denen mit ungeradem Abstand mit der größten noch nicht verwendeten Nummer beginnt. Auf diese Weise entstehen in meinem Beispiel folgende Raupen:



Nun hat man die Werte von 0 bis t (Werte mit geradem Abstand zur Wurzel) und von m bis k-1 (Werte mit ungeradem Abstand zur Wurzel) genau einmal verwendet (ergibt sich aus der Konstruktion). Man addiert zu jeder der Nummern in dem verbleibenden Baum t+1. Waren zuvor in dem Baum alle Nummern von 0 bis j (j=Anzahl der Kanten in Baum 3) (einmal) vorhanden (was der Fall ist, da er graziös nummeriert ist), so sind dort jetzt alle von t+1 bis j+t+1. Man hat also alle Zahlen von 0 bis j+t+1 und von m bis k-1 (jeweils einmal) verwendet. Insgesamt sind das so viele Zahlen wie Knoten, also k. Die beiden Reihen (Zahlen von 0 bis j+t+1 und Zahlen von m bis k-1) sind immer durchgängig. Würden sich beide Reihen überlagern, wären das aber mehr als k Ziffern (da die kleinste Zahl 0 und die größte k-1 ist und dies genau k Zahlen sind), was bedeutet, dass jede Nummer zwischen 0 und k-1 genau einmal auftritt (da es natürliche Zahlen sind und keine Zahl doppelt vorkommt, kann auch keine Zahl fehlen). In meinem Beispiel würde sich jetzt folgende Nummerierung für den Baum 3 ergeben:

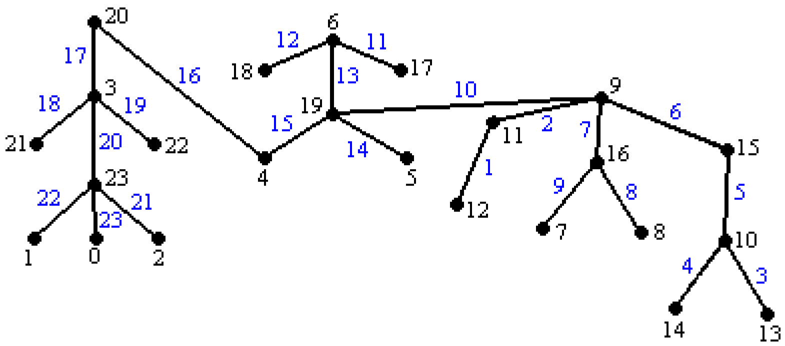


Bis jetzt wurde keine Zahl mehr als einer Kante zugeordnet.
Beweis: Der Algorithmus zum Nummerieren der Knoten in den Raupen entspricht prinzipiell dem beim graziösen Nummerieren von einzelnen Raupen. Bei diesen habe ich schon gezeigt, dass die Nummern der Kanten mit zunehmenden Abstand von der Wurzel abnehmen und bei gleichem Abstand nie gleich sind. Das gilt auch hier, also kommt in einer Raupe nie eine Nummer (an den Kanten) zweimal vor.

Ich betrachte die m-te Raupe. Sie soll i_m Knoten haben, wobei a_m geraden Abstand zur Wurzel und b_m ungeraden Abstand zur Wurzel haben (d.h. $a_m+b_m=i_m$).
Die größte Zahl der Kanten in der ersten Raupe ist zwischen der Wurzel (Nummer 0) und der höchsten Zahl (k-1), also k-1. Die kleinste Zahl befindet sich zwischen der am weitesten entfernten und gleichzeitig kleinsten Zahl, ungeraden Abstands zur Wurzel, und derselben geraden Abstands (die dann allerdings die größte solcher Zahlen ist) (Das sind jeweils die Zahlen die beim Algorithmus als letztes nummeriert wurden).Diese beiden Knoten heben die Zahlen $0+a_1-1=a_1-1$ (der erste verteilte Wert ist 0, der zweite 1 usw. und der letzte (also der a_1-te) den Wert a_1-1) und $k-1-(b_1-1)=k-b_1$(der erste verteilte Wert ist k-1, der zweite k-2 usw. und der letzte (also der b_1-te) den Wert $k-b_1$). Die Kante hat also die Nummer $k-b_1-a_1+1=k-i_1+1$. Zwischen diesen beiden Werten (die Werte eingeschlossen) liegen genau i_1-1 Werte. Genau so viele Kanten hat auch die erste Raupe, da kein Wert doppelt auftritt, muss jeder Wert zwischen k-1 und $k-i_1+1$ genau einmal auftreten.
Beim zweiten Baum bekommt nun die Wurzel den Wert des letzten Knotens mit ungeradem Abstand zur ersten Wurzel plus eins, also a_1 und der erste Knoten mit ungeradem Abstand zu dieser Wurzel $k-b_1-1$ (die letzte Zahl mit ungeradem Abstand zur ersten Wurzel minus 1). Die Kante mit größtem Wert ist also $k-b_1-a_1-1=k-i_1-1$. Zwischen den Kantenwerten der ersten Raupe und diesem Wert fehlt die Kante mit der Nummer $k-i_1$. Diese fügt man später an. Beispielsweise wäre das möglich zwischen der ersten Raupe (Knoten $k-b_1$) und der zweiten Raupe (Wurzel a_1). Die kleinste Kante wäre zwischen a_1+a_2-1 (größter Knoten mit geradem Abstand zur Wurzel) (der erste verteilte Wert ist a_1, der zweite a_1+1 usw. und der letzte (also der a_2-te) den Wert $a_1+ a_2-1$) und $k-b_1-1-(b_2-1)=k-b_1-b_2$ (größter Knoten mit ungeradem Abstand zur Wurzel) (der erste verteilte Wert ist $k-b_1-1$; der zweite $k-b_1-2$ usw. und der letzte (also der b_2-te) den Wert $k-b_1+b_2-1$). Diese hat also den Wert $k-b_1-a_1-b_2-a_2+1=k-i_1-i_2+1$. Zwischen den beiden Werten liegen genau i_2-1 Zahlen. Genau so viele Kanten hat auch die zweite Raupe (Knotenanzahl-1), und da kein Wert doppelt auftritt muss jeder Wert zwischen $k-i_1-1$ und $k-i_1-i_2+1$ genau einmal auftreten. Dies hat keine Werte mit vorhergehenden Raupen gemeinsam.
Das was ich jetzt für die ersten beiden Raupen gemacht habe, kann man verallgemeinern (Beweis wäre per Induktion möglich, ich denke aber es ist so ersichtlich):
Beim m-ten Baum bekommt nun die Wurzel den Wert des letzten Knotens mit ungeradem Abstand zur m-1-ten Wurzel plus eins, also $a_1+a_2+...+a_{m-1}$ und der erste Knoten mit ungeradem Abstand zu dieser Wurzel $k-b_1-b_2-...-b_{m-1}-1$ (die letzte Zahl mit ungeradem Abstand zur m-1-ten Wurzel minus 1). Die Kante mit größtem Wert hier ist also $k-b_1-b_2-...-$

b_{m-1}-a_1-a_2-...-a_{m-1}-1=k-i_1-i_2-...-i_{m-1}-1. Zwischen dieser Kante und der kleinsten Kante der m-1-ten Raupe fehlt die Kante mit der Nummer k-i_1-i_2-...-i_{m-1}. Diese fügt man später an. Beispielsweise wäre das möglich zwischen der m-1-ten Raupe (Knoten k-b_1-b_2-...-b_{m-2}) und der n-ten Raupe (Wurzel a_1+a_2+...+a_{m-1}). Die kleinste Kante wäre zwischen a_1+a_2+...+a_m-1 (größter Knoten mit geradem Abstand zur Wurzel) und k-b_1-b_2-...-b_{m-1}-1-(b_m-1)=k-b_1-b_2-...-b_m. Diese hat also den Wert k-b_1-b_2-...-b_m-a_1-a_2-...-a_m+1=k-i_1-i_2-...-i_m+1. Zwischen den beiden Werten (dem größten und dem kleinsten Kantenwert) liegen genau i_n-1 Zahlen. Genau soviele Kanten hat auch die m-te Raupe (Knotenanzahl-1), da kein Wert doppelt auftritt, muss jeder Wert zwischen Nummer k-i_1-i_2-...-i_{m-1} und k-i_1-i_2-...-i_m+1 genau einmal auftreten. Dies hat keine Werte mit vorhergehenden Raupen gemeinsam. All diese Aussagen zusammen bedeuten, dass in den Raupen keine Kantenzahlen mehrmals auftreten. w.z.b.w.

Die zunächst fehlenden Werte ergänzt man nun durch das Ergänzen von Kanten mit diesen Werten. Man achte dabei darauf, dass keine Kreise entstehen. Eine Möglichkeit ist die oben erwähnte. Hierbei wird eine Kante vom ersten zur zweiten, eine vom zweiten zum dritten usw., und eine vom n-2-ten zum n-1-ten Baum erzeugt. Dabei entstehen keine neuen Kreise (da zuvor keine da waren und solche Verbindungen zwischen den Raupen nicht existierten). Nun sind alle Kantennummern von k-1 bis k-i_1-i_2-...-i_{n-1}+1 genau einmal vorhanden. i_n sei die Anzahl der Knoten in dem einen Baum, der keine Raupe sein muss. Da k=i_1+i_2+..+i_n gehen die Kantennummern also von k-1 bis i_n+1. Der letzte Baum war vor der Umnummerierung graziös nummeriert, was bedeutet an den Kanten standen alle Ziffern zwischen 1 und i_n-1. Diese Ziffern veränderten sich auch nicht durch die Addition einer Konstanten zu jedem Knoten. Nun fehlt nur noch die Nummer i_n an den Kanten. Diese ergänze ich nun auf beliebige Weise von dem Baum, der keine Raupe ist zu einer der Raupen (anschaulich ist klar, dass dies immer möglich ist). Da weder in dem letzten Baum selbst, noch in den Raupen ein Kreis existierte und kein Weg zwischen beiden Teilen bestand, entsteht auch durch das Anfügen dieser Kante kein neuer Kreis. Es ist also ein Baum entstanden, dessen Knoten mit allen Ziffern zwischen 0 und k-1 (k ist die Knotenanzahl) genau einmal und dessen Kanten mit allen Ziffern zwischen 1 und k-1 genau einmal nummeriert sind. D.h. es ist eine graziöse Nummerierung entstanden, die in meinem Beispiel folgendermaßen aussieht:



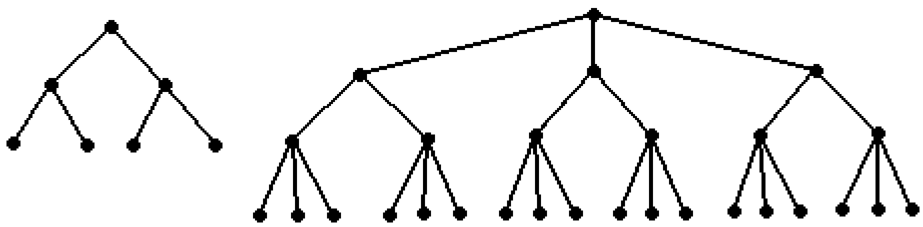
20
17
16
3
18
19
21
20
22
23
22
21
23
1
0
2
6
12
11
18
13
17
19
15
4
14
5
10
9
2
7
6
11
1
12
16
9
8
7
8
15
5
10
4
3
14
13

2.3. Eine weitere Idee auf Grundlage des Nummerierens grad-regulärer Graphen

Es gibt eine weitere Gruppe von Bäumen, für die bewiesen ist, dass sie immer graziös nummerierbar sind. Diese heißen grad-regulär.

Def.: Ein Baum ist dann grad-regulär, wenn es einen Knoten gibt (dieser sei die Wurzel), so dass gilt: Haben 2 Knoten denselben Abstand zur Wurzel, so haben sie auch denselben Grad.

Einige Beispiele hierfür sind:



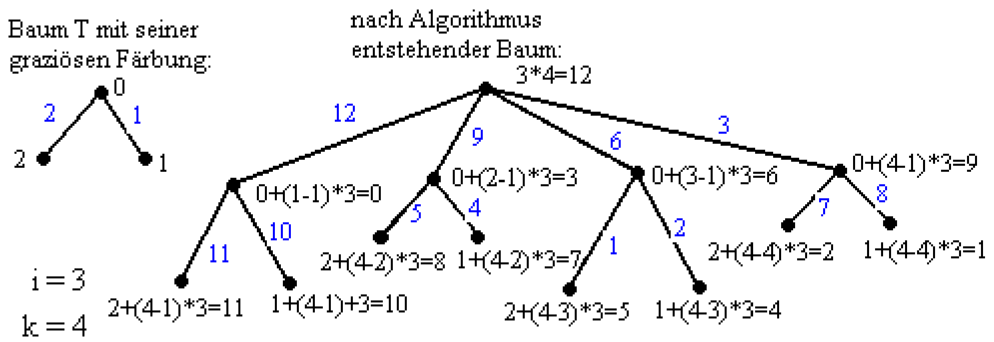
Man erkennt, dass die Form immer in etwa dieselbe ist.

Um zu zeigen, dass diese Gruppe immer graziös nummerierbar ist benötige ich zuerst folgenden

*Satz: Sei T ein Baum, für den eine graziöse Färbung bekannt ist. Diese Färbung soll dem Knoten k die Nummer 0 zuordnen. Dann ist der Baum, der aus k Kopien von T und einem Knoten w besteht (wobei w mit allen Kopien vom Knoten x durch eine Kante verbunden ist) auch graziös färbbar. Diesen neuen Baum bezeichne ich mit w +k*E*_xT.*

Beweis: Es sei i die Anzahl der Knoten in dem zu kopierenden Baum T.
Eine graziöse Färbung kann man dann immer mithilfe von folgendem Algorithmus herstellen:
Die dem Knoten z in der Originalfärbung zugeordnete natürliche Zahl sei z_1.
Ist der Abstand zwischen einem Knoten z und dem Knoten x in T gerade, so wird z_1 der ersten Kopie von z zugeordnet. Der n-ten Kopie von z wird die Zahl z_1+ (n-1)Ei zugeordnet.
Ist der Abstand zwischen einem Knoten z und dem Knoten x in T ungerade, so wird z_1 der k-ten Kopie von z zugeordnet. Der n-ten Kopie von z wird die Zahl z_1+ (k-n)Ei zugeordnet.
Dem Knoten w wird die Zahl kEi zugeordnet.

Ein Beispiel für das Anwenden dieses Algorithmuses ist:



Beweis, dass auf diese Art immer eine graziöse Färbung entsteht:

1. Teil: Beweis, dass bei der obigen Färbung alle Zahlen zwischen 0 und kEi genau einmal verwendet wurden:

Zunächst gibt es genau kEi+1 Knoten, da der zu färbende Graph aus k Kopien von T (der i Knoten hat) (das macht zusammen kEi Knoten) und dem einzelnen Knoten w besteht, sodass die obige Aussage von der Anzahl der Knoten her wahr sein könnte.
n-1 und k-n nehmen beide für 1PnPk alle Werte zwischen 0 und k-1 genau einmal an. Das bedeutet, dass den k Kopien eines beliebigen Knotens z die Zahlen z_1+ yEi zugeordnet werden, wobei 0PyPk-1. Der Wert y ist hierbei für jede Kopie anders, was bedeutet, dass zwei Kopien desselben Knotens nicht gleich sein können. Die Originalfärbung von T war auch graziös, d.h. z_1 nimmt alle Werte zwischen 0 und i-1 an, was alles verschiedene Restklassen bei der Division durch i sind. Jede Kopie von z (mit der Nummer z_1+ yEi) lässt bei dieser Division den Rest z_1, was wiederum heißt, dass die Nummern von Kopien von 2 verschiedenen Knoten zu verschiedenen Restklassen gehören, und somit auch verschieden sind. Daraus, dass die Originalfärbung von T auch graziös war, ergibt sich, dass z_1 nur Werte zwischen 0 und i-1 annehmen kann. Im Maximalfall wäre also z_1=i-1 und y=k-1, der Wert des dazu gehörigen Knotens ist also der größte unter den k Kopien und beträgt i-1+ (k-1)Ei = iEk-1. Dazu kommt im ganzen Graphen nur noch der Wert von w mit kEi, der vorher wegen seiner Größe noch nie aufgetaucht sein kann. Es wurde also keine Zahl zwei Knoten und keinem Knoten eine Zahl größer als kEi zugeordnet. Zusammen mit der Aussage, dass der Graph genau kEi+1 Koten besitzt, bedeutet das, dass jede Zahl zwischen 0 und kEi genau einmal verwendet wurde.

2. Teil: Beweis, dass auf diese Weise den Kanten alle Zahlen zwischen 1 und kEi genau einmal zugeordnet werden :

Als erste Aussage benötige ich, dass es zwischen 1 und kEi genau k Zahlen gibt, die bei der Teilung durch i denselben Rest lassen. Dies ist leicht zu sehen, da es für jeden Rest dieselbe Anzahl von zugehörigen Zahlen gibt (da mit der Restklasse 1 begonnen wird (bei 1) und mit der Restklasse 0 geendet wird (bei kEi)) und es für die Restklasse 0 k Zahlen gibt, und zwar iEy, wobei y Werte zwischen 1 und k annimmt, also genau k Werte.
Zunächst einmal gibt es k Kanten, die w mit Kopien des Knoten x verbinden. Den Kopien von x wurden die Zahlen 0+ (n-1)Ei (1PnPk) zugeordnet (da x zu sich selber einen geraden Abstand, und zwar 0 hat). Da w die Zahl kEi zugeordnet wurde, werden den k Kanten die Zahlen kEi-(n-1)Ei = iE(k-n+1) 1PnPk (jede einmal) zugeordnet. In diesem Intervall nimmt k-n+1 also alle Zahlen zw. 1 und k einmal an. Das sind k verschiedene Zahlen, die bei der Teilung durch i den Rest 0 lassen, also alle solche Zahlen zwischen 1 und kEi.
Ansonsten gibt es nur noch Kanten, die als Kopien einer Kante in T aufgefasst werden können. Ich nehme an, in der Orginalfärbung wurden den Knoten, die die Kante verbindet, die Zahlen v_1 und v_2 zugeordnet. Da v_1 und v_2 direkt verbunden sind und der Graph ein Baum ist, ist der Abstand zw. einem Punkt und x genau um eins größer als der Abstand zwischen dem anderen Punkt und x, d.h. ein Abstand ist gerade und der andere ungerade. O.b.d.A. sei der Abstand zwischen v_1 und x gerade und der zwischen v_2 und x ungerade. Dann wurde der n-ten Kopie von v_1 die Zahl v_1+(n-1)Ei (1PnPk) und der n-ten Kopie von v_2 die Zahl v_2+(k-n)Ei zugeordnet. Der n-ten Kopie der beschriebenen Kante wurde also die Zahl |v_1+(n-1)Ei – v_2-(k-n)Ei| = |v_1 –v_2| + |(2n-k-1)|Ei (1PnPk). Da n genau k verschiedene Werte annehmen kann, haben die Kopien einer Kante auch k verschiedene Werte, die bei der Teilung durch i alle denselben Rest |v_1-v_2| lassen. Das sind alle k Möglichkeiten für diesen einen Rest. |v_1-v_2| ist aber für 2 verschiedene Punkte auch verschieden und nimmt Werte zwischen 1 und i-1 an (da die Orginalfärbung von T auch graziös war). D.h. den Kanten wurden alle Werte zwischen 1 und kEi zugeordnet, da in jeder Restklasse k verschiedene Werte in diesem Bereich existieren, und soviele Werte pro Restklasse oben nachgewiesen wurden. Da es bei Bäumen eine Kante weniger gibt als Knoten und der Graph kEi+1 Knoten hat, besitzt er nur kEi Kanten, sodass keine Zahl doppelt verwendet wurde.

Aus den 2 Teilen ergibt sich, dass den Knoten alle Zahlen zwischen 0 und der Knotenanzahl minus 1 und den Kanten alle Zahlen zwischen der 1 und der Kantenanzahl genau einmal zugeordnet wurden, was eine graziöse Färbung ausmacht.

$\rightarrow$ der Graph wurde graziös gefärbt.

W.z.b.w.

Schaut man sich nun grad-reguläre Bäume an, so wird klar, dass man sie immer durch die obige Konstruktion aus kleineren grad-regulären Graphen zusammensetzen kann (T ist immer einer der Bäume die entstehen, wenn man die Wurzel und alle zu ihr führenden Knoten entfernt). Man kann also bei einem Baum mit einer Kante beginnen, die Konstruktion beliebig oft durchführen und kann so eine graziöse Nummerierung für jeden grad-regulären Baum konstruieren. Beim nacheinander Ausführen der Konstruktion, muss der Baum allerdings so umgefärbt werden, dass der Knoten, der die Wurzel (später x) von T ist eine 0 steht. Dass ist relativ einfach. Nach der zuvor durchgeführten Konstruktion hat dieser Knoten die Nummer kEi. Hat ein Knoten die Nummer z, so wird diese Nummer durch kEi-z ersetzt. Also hat x die Nummer kEi-kEi=0, was ich ja erreichen wollte. Die Nummern der Kanten bleiben aber gleich. Hat eine Kante zuvor den Wert $y= |v_1-v_2|$, wobei v_1 und v_2 die Werte der Knoten sind, die von der Kante verbunden werden, dann hat die Kante danach den Wert $y_2=|kEi-v1-kEi+v_2|=|v_1-v_2|=y$. Der Wert der Kante hat sich also nicht verändert, was bedeutet die Färbung ist graziös (Der Bereich der Knotenwerte bleibt gleich, ich denke das ist ersichtlich).
Aus all diesen Aussagen lässt sich folgern, dass man jeden grad-regulären Graphen graziös färben kann.
Davon ausgehend kann man auf die Idee kommen, eine Färbung aller Bäume zu konstruieren, indem man versucht aus gegebenen graziösen Färbungen durch Entfernen einer Kante und eines Knotens oder auch kleinerer Graphen eine Färbung für kleinere Bäume zu konstruieren. Man würde dann ausgehend von den grad-regulären Graphen eine graziöse Färbung für alle Bäume finden. Aber auch diese Konstruktion konnte bis heute noch nicht in die Praxis umgesetzt werden.