1. Einleitung – wichtige Begriffe

Da sich meine besondere Lernleistung mit dem graziösen Färben (bzw. Nummerieren) von Graphen (speziell von Bäumen), einem Teilgebiet der Graphentheorie, beschäftigt, und grundlegende Begriffe und Tatsachen aus dem Unterricht nicht bekannt sind, werde ich im folgendem solche Begriffe und Tatsachen einführen. Die Graphentheorie ist eines der jüngsten Teilgebiete der Mathematik. Das erste mal wurde sie erst im 18. Jh. von Euler zum Lösen von Problemen genutzt. Es gibt sehr viele Begriffe, die diesem Teil der Mathematik angehören. Viele wurden von mehreren Personen eingeführt, sodass für ein und denselben Begriff mehrere Wörter gebräuchlich sind. Im folgenden werde ich mir aus der Vielzahl der Begriffe nur die auswählen, die für meine Arbeit eine Bedeutung haben und für diese auch nur die gebräuchlichsten Wörter einführen. Zur zusätzlichen Übersichtlichkeit der Arbeit sind am Ende die Definitionen noch einmal im Überblick aufgeführt.

1.1. Graphen

Es gibt verschiedene Definitionen des Begriffes Graph. Prinzipiell ist ein Graph eine Ansammlung von Knoten und Kanten. Etwas genauer sagt man: Ein Graph G besteht aus einer Menge von Elementen, genannt Knoten, und einer Menge von Elementen, genannt Kanten, wobei jede Kante genau 2 Knoten verbindet (diese zwei Knoten müssen nicht zwingend verschieden sein). Diese Definition ist allerdings eher anschaulich. Mathematisch korrekt ist mehr folgende:

Def.: Ein Graph G ist ein Paar (V,E) disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$, wobei $[V]^2$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V bezeichnet, d.h. G=[V,E].

Diese Definition bedeutet aber eigentlich nichts anderes als die erste, da man die Menge V als die Menge der Knoten und die Menge E als Verknüpfung zweier Elemente aus V und somit als die Menge der Kanten auffassen kann. Zur besseren Anschauung eines Graphen verwendet man graphische Darstellungen. Hierbei werden die Knoten durch Punkte und die Kanten durch Verbindungslinien zwischen zwei Knoten dargestellt, wie folgendes Beispiel zeigt:

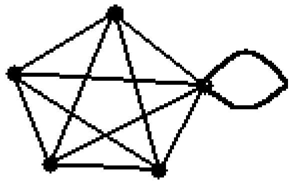

Abbildung 1:
(G = [{1,2,3,4,5},{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),(5,5)}])

An dieser Stelle könnte man sich die Frage stellen, was die Einführung dieses Modells „Graph“ überhaupt für einen Sinn macht. Ist sie praktisch wichtig und anwendbar? Diese Frage kann man eindeutige mit ja beantworten. Bei vielen Aufgaben, die auch im Alltag wichtig sind, sorgt dieses Modell für große Vereinfachungen. Als Begründer der Graphentheorie gilt , wie schon erwähnt, der bekannte Mathematiker Leonard Euler. Ihn regte damals ein praktisches Problem dazu an Graphen zu benutzen und zwar das sogenannte Königsberger Brückenproblem. In Königsberg flossen mehrere Flüsse ineinander. Es gab in der ganzen Stadt 7 Brücken und die Frage war, ob man einen Weg finden könnte, der jede Brücke genau einmal überquert. Euler fasste die Brücken als die Kanten und die voneinander durch die Flüsse abgetrennten Landteile als die Knoten eines Graphen auf. Dann betrachtete er nur diesen und zeigte anhand einiger Sätze (die er bewies), dass ein derartiger Weg nicht existiert. Den gesamten Beweis will ich hier nicht führen, da dies weit vom Thema der Arbeit wegführen würde. Ich möchte an dieser Stelle aber noch erwähnen, dass es weitreichende praktische Anwendung von Graphen gibt. Bei einer Reihe von Optimierungsproblemen werden sie verwendet. Beispiele hierfür sind das optimale Anlegen von Straßenbahnnetzen, das Optimum für eine große Verkehrsstraße, optimale Wege für die Müllabfuhr oder für Postboten u.ä. Man kann mithilfe der Graphentheorie sogar einen Weg durch jedes beliebige Labyrinth finden.

1.2. graziöser Graph – graziös nummerierter Graph

Zunächst einmal kann man einen Graphen G nummerieren (dies kann man auch das Färben des Graphen G nennen). Wenn man die Grazie von Graphen betrachten will, ordnet man hierzu jedem Knoten eine natürliche Zahl (wobei $0 \in \mathbb{N}$) zu, man bildet also eine Abbildung der Knoten des Graphen G auf die Natürlichen Zahlen ($V(G) \rightarrow \mathbb{N}$). Um festzustellen ob eine solche Färbung graziös ist, ordnet man nun jeder Kante den Betrag der Differenz der Werte der Knoten, die diese Kante verbindet (siehe Abbildung 2 und 3), zu.

Def.: Eine solche Nummerierung ist graziös, wenn jede der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- **Keine der Zahlen, die den Knoten zugeordnet sind, ist größer als die Kantenanzahl**
- **Es gibt keine 2 Knoten, denen der gleiche Wert zugeordnet wurde**
- **Bei den Zahlen, die den Kanten zugeordnet wurden, ist jede natürliche Zahl zwischen 1 und der Kantenanzahl genau einmal enthalten.**

Sind alle diese Bedingungen erfüllt, ist der Graph graziös gefärbt (oder nummeriert) (siehe Abbildung2). Als graziösen Graph bezeichnet man hingegen einen Graph, für den es irgendeine graziöse Nummerierung gibt. Es kann also auch sein, dass ein Graph, wie in Abbildung 3 gezeigt, ein graziöser Graph ist (da es eine graziöse Nummerierung dieses Graphen gibt, siehe Abbildung 2), aber dieser nicht graziös nummeriert wurde. Natürlich kann auch, wie in Abbildung 4 gezeigt, ein Graph auftreten, den man unter keinen Umständen graziös färben kann. Ein solcher Graph heißt dann nicht graziös.

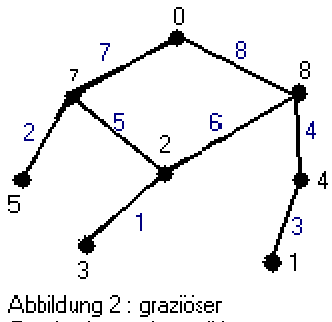

Abbildung 2 : graziöser Graph, der auch graziös gefärbt ist

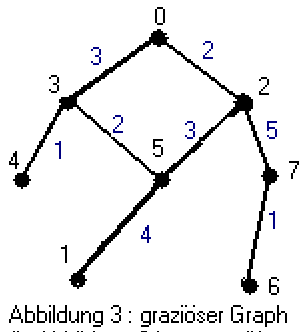

Abbildung 3 : graziöser Graph (in Abbildung 2 ist er graziös gefärbt) , der hier nicht graziös gefärbt ist

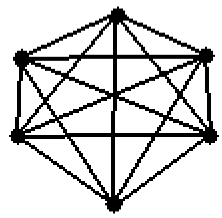

Abbildung 3 : nicht graziöser Graph

1.3. Bäume und ihre graziöse Nummerierung

Meine Arbeit wird sich im folgenden besonders mit der graziösen Nummerierung von Bäumen beschäftigen, darum möchte ich nun zunächst den Begriff Baum definieren. Hierzu benötigt man einige weitere Begriffe:

Weg: Ein Weg ist eine Menge von Kanten in einem Graphen, wobei der Endknoten einer Kante immer der Anfangsknoten der nachfolgenden Kante ist (zwei in einem Weg aufeinander folgende Kanten dürfen nicht die gleichen sein). Auf diese Weise verbindet ein Weg einen Anfangsknoten mit einem Endknoten. Als Länge eines Weges wird die Anzahl der zu ihm gehörenden Kanten bezeichnet. (Veranschaulichung siehe Abbildung unten)

Kreis: Ein Weg in einem Graphen heißt Kreis, wenn er einen Knoten mit sich selbst verbindet (Anfangs- und Endknoten stimmen überein). (Veranschaulichung siehe Abbildung unten)

Zusammenhängender Graph: In einem zusammenhängenden Graph sind alle Knoten durch Wege verbunden, d.h. es existiert ein Weg von jedem beliebigen Knoten a zu jedem beliebigen Knoten b (a ≅ b). (Veranschaulichung siehe Abbildung unten)

Nun kann ich auch den Begriff Baum definieren:

Def.: Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

In den folgenden 3 Abbildungen versuche ich all diese Begriffe zu veranschaulichen.

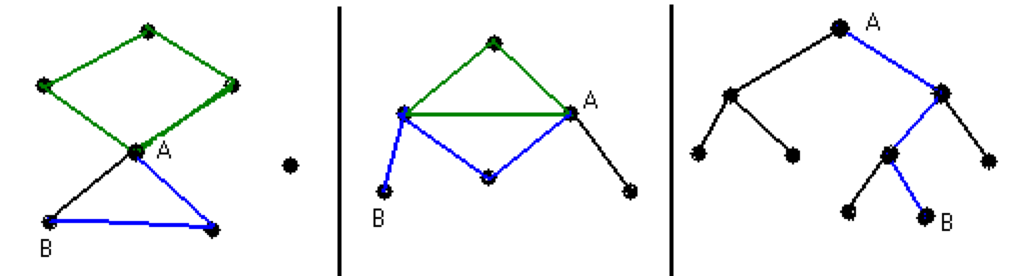

Abbildung 5: nicht zusammenhängender Graph

Abbildung 6: zusammenhängender Graph

Abbildung 7: Baum ohne Kreise

Mit dieser Farbe bekennzeichne ich Beispiele für Kreise, die den Knoten A mit sich selbst verbinden

Mit dieser Farbe bekennzeichne ich Beispiele für Wege, die den Knoten A mit dem Knoten B verbinden

Im folgendem benötige ich noch den Begriff Grad eines Knotens:

Def.: Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der Kanten, die in ihm beginnen bzw. enden.

Die graziöse Färbung von Bäumen hat eine besondere Eigenschaft. Um diese zu erläutern benötige ich 2 Sätze:

Hilfssatz 1: Jeder Baum mit min. 2 Knoten hat mindestens einen Knoten, der nur eine Kante berührt (der also den Grad 1 hat)

Indirekter Beweis: Gäbe es keinen solchen Knoten, würde jeder Knoten von min. 2 Kanten berührt werden. Würde also ein Weg in irgendeinem Knoten enden, könnte man ihn um eine Kante erweitern (da in dem Knoten, in dem der Weg endet, eine andere Kante beginnt, die man an den Weg anfügen kann). Führt man dies weiter, so könnte man den Weg beliebig lange, also praktisch ins Unendliche verlängern. Da ein Graph aber nur endlich viele Knoten hat, muss dieser Weg irgendwann durch einen Knoten gehen, in dem er schon war, er verbindet diesen Knoten also mit sich selbst und ist deshalb ein Kreis. D. h. der Graph ist kein Baum, was einen Widerspruch darstellt. Somit ist die Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

Satz 1: Ein Baum B mit n Knoten hat immer genau n-1 Kanten.

Beweis: dieser Satz ist mittels vollständiger Induktion über n zu beweisen:

IA : für n = 1: hat der Graph nur einen Knoten und ist ein Baum, so darf er keine Kante haben, da diese sonst den Knoten mit sich selbst verbinden würde und somit einen Kreis darstellt, was im Widerspruch dazu steht, dass der Graph ein Baum ist. → Kantenanzahl = 0 = 1-1 = n-1 → Der Satz gilt für n = 1.

ISchritt:

IV: Der Satz gelte für n = k. →Ein Baum mit k Knoten hat k-1 Kanten

IBeh.: Der Satz gilt für n = k + 1. → Ein Baum mit k+1 Knoten hat k Kanten

IBew.: Es sei B ein Baum mit k+1 Knoten. Hierbei ist die Knotenanzahl immer größer oder gleich 2 (k+1=1 wird ausgeschlossen, da dies schon über den IA abgedeckt wurde).

Im Baum B gibt es also (laut dem oben bewiesenen Hilfssatz) mindestens einen Knoten vom Grad 1. Ich bezeichne einen beliebigen dieser Knoten mit v. Die eine Kante, die in v endet bezeichne ich mit e. Nun kann man einen Graphen B-v bilden, indem man von B den Knoten v und die Kante e entfernt. Durch das Entfernen von v und e wurden nur Wege verkürzt, die v als Endknoten hatten, denn durch v und e konnten keine anderen Wege gehen, da nur eine Kante hinführte und diese sonst zweimal hintereinander im Weg enthalten sein müsste, was unmöglich ist (siehe Def. Weg). Das Entfernen hat also keinen Einfluss auf Wege zwischen 2 Knoten, die ungleich v sind. Da B ein Baum ist, existiert zwischen 2 beliebigen Knoten ein Weg (siehe Definition Baum, bzw. zusammenhängender Graph). In B-v ist das also auch der Fall, da die in ihm existierenden Wege sich durch das Entfernen nicht verändert haben und so alle noch vorhanden sind. B-v ist also ein zusammenhängender Graph. Außerdem gab es in B keinen Kreis (da er ein Baum ist). Durch das Entfernen von v und e sind keine neuen Wege entstanden, und somit auch keine Kreise. B-v kann also keinen Kreise haben. Somit ist B-v ein zusammenhängender Graph ohne Kreise, also ein Baum. Ich habe von B nur einen Knoten entfernt (und eine Kante, hier aber unwichtig) um auf B-v zu kommen, somit hat dieser Baum einen Knoten weniger als B, also k Knoten. Für Bäume mit k Knoten gilt aber nach IV, dass diese Bäume k-1 Kanten haben. →B-v hat k-1 Kanten. Um von B auf B-v zu kommen habe ich nur eine Kante entfernt (und einen Knoten, hier aber unwichtig), B hat also genau eine Kante mehr als B-v, also k-1+1= k Kanten. B hat also k+1 Knoten und k Kanten.

→ Habe ich einen Baum mit k+1 Knoten, so hat dieser k Kanten.

w.z.b.w.

Somit ist der Satz 1 bewiesen.

Nun zu dem besonderen am graziösen Nummerieren von Bäumen. Die Definition vom graziösen Nummerieren von Graphen sagt unter anderem, dass die natürlichen Zahlen, die den Knoten zugeordnet sind, nicht größer als die Kantenanzahl sein dürfen. Das heißt, da ein Baum einen Knoten mehr als Kanten hat, dass diese Zahlen die Knotenanzahl n minus eins nicht überschreiten dürfen. Zusätzlich ist bekannt, dass jeder Knoten eine andere Zahl haben muss. Dass bedeutet, dass n verschiedene Zahlen, die kleiner oder gleich n-1 sind, verwendet werden müssen. Dies sind alle Zahlen zwischen 0 und n-1 (da negative Zahlen laut Definition nicht verwendet werden können). Das heißt, ist ein Baum graziös nummeriert, so sind den Knoten alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und der Kantenanzahl und den Kanten alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und der Kantenanzahl zugeordnet. Diese Eigenschaft haben nur Baume.