

Besondere Lernleistung

Fakultät für Mathematik und Informatik
an der Universität Leipzig

Kartenentwürfe der Erde

Jörg Adler Klasse 11
Wilhelm–Ostwald–Schule

Betreuer:
Dr. Dieter Sosna

19.01.2001

Bibliographische Beschreibung

Name des Verfassers: Jörg Adler

Thema: Kartenentwürfe der Erde

Umfang: 44 Seiten

Referat

Das Ziel dieser, an der Wilhelm–Ostwald–Schule durchgeführten, Schülerarbeit war es, eine leicht verständliche Einführung in die Kartenprojektionen der Erde zu liefern. Diese sollte so angelegt sein, daß sie später auch leicht für das Internet aufbereitet werden kann.

Abstract

The aim of this pupil's work, which took place in the Wilhelm–Ostwald–Schule, was to provide an introduction in map projection of the earth, which is easily understandable. Also this work should be well transformable into HTML–pages.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer von der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Leipzig Herrn Dr. Sosna für die hilfreiche Unterstützung bedanken.

Mein Dank gilt auch Herrn Lohmann, den Betreuer seitens der Schule.

Inhaltsverzeichnis

Bibliographische Beschreibung	2
Referat	2
Abstract	2
Danksagung	3
Inhaltsverzeichnis	4
Vorwort	7
1 Allgemeines zu den Projektionen	8
2 Azimutale Entwürfe	10
2.1 Die Orthographische Projektion	11
2.1.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen	11
2.2 Die gnomonische Projektion	13
2.2.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen	13
2.2.2 Anwendungsbeispiele	14
3 Zylinderprojektionen	15
3.1 Der echte Zylinderentwurf des Archimedes (oder Lambert) . .	17
3.1.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen	17
3.1.2 Anwendungsbeispiele	18
3.2 Der Mercator - Entwurf (winkeltreue)	19
3.2.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen	19

3.2.2	Anwendungsbeispiele	21
3.3	Mittalabstandstreuer Entwurf oder quadratische Plattkarte . .	23
3.3.1	Herleitung der Abbildungsgleichungen	23
4	Kegelentwürfe	24
4.1	Winkeltreuer Kegelentwurf	26
4.1.1	Herleitung der Abbildungsgleichungen	26
4.2	Flächentreuer Kegelentwurf	29
4.2.1	Herleitung der Abbildungsgleichungen	29
4.2.2	Anwendungsbeispiele	31
4.3	Abstandstreuer Kegelentwurf	32
4.3.1	Herleitung der Abbildungsgleichungen	32
4.3.2	Anwendungsbeispiele	32
5	Anmerkungen zu den verwendeten Programmiersprachen	34
5.1	AutoCad	34
5.2	LaTeX	34
	Literaturverzeichnis	35
	Selbständigkeitserklärung	36
	Anhang	37
A	Einige Kartenbeispiele	37
A.1	Azimutalentwürfe	37
A.1.1	Orthographische Projektion	37
A.1.2	Gnomonische Projektion	38

A.2	Zylinderentwürfe	39
A.2.1	Entwurf nach Lambert	39
A.2.2	Entwurf nach Mercator	40
A.2.3	Quadratische Plattkarte	41
A.3	Kegelentwürfe	42
A.3.1	Winkeltreuer Entwurf	42
A.3.2	Flächentreuer Entwurf	43
A.3.3	Abstandstreuer Entwurf	44

Vorwort

In dieser Abhandlung sind die drei gebräuchlichsten Abbildungstypen der Kartenprojektion, wie sie auch in Dr. Eberhard Schröders Buch "Kartenentwürfe der Erde" beschrieben werden, näher beleuchtet worden. Es wurden neue Bilder gezeichnet, welche das Verständnis für die manchmal doch recht komplizierten Gleichungen erhöhen sollen. Außerdem wurde mit LaTeX die Form der Formeln soweit verbessert, daß einem Verstehen aus reinen formalen Gründen nichts mehr im Wege stehen dürfte. Wie bereits oben erwähnt, handelt es sich bei den folgenden Seiten um eine Schülerarbeit eines Schülers der 11. Klasse. Daraus ergeben sich aber auch Probleme für das Thema, da hier für die Herleitung der Abbildungsgleichungen meist auf die Vektorrechnung und Differentialgeometrie zurückgegriffen wird. Diese wurden jedoch noch nicht in der Schule eingeführt. Da man der Schule jedoch nicht zuviel vorwegnehmen sollte, konnte dieser Teil der Abbildungsgleichungen leider nicht bis in Detail beleuchtet werden. Man sollte sich also nicht über Formeln wundern, welche "vom Himmel gefallen scheinen".

1 Allgemeines zu den Projektionen

In den folgenden Zeilen wird die Erdkugel als Einheitskugel mit dem Radius 1 betrachtet. Dies macht insofern Sinn, da man nach dem Anwenden der Abbildungsgleichungen die entstandene Karte sowieso in einem geeigneten Maßstab darstellen muß.

Das Koordinatensystem der Erde wird durch einen Schar von Großkreisen bestimmt, welche alle durch die beiden Drehpunkte der Erde, d.h. durch die Pole gehen. Diese Kreise werden als Längenkreise bezeichnet. Ein weiterer Teil dieses Koordinatensystems sind nun Kreise, welche auf der Kugeloberfläche entlang gehen und zu den Längenkreisen in einem rechten Winkel stehen. Sie heißen Breitenkreise. Nun gilt folgende Festlegung: Die Längenkreise werden in Halbkreise zerlegt, welche von Pol zu Pol laufen, diese werden als Meridiane bezeichnet. Der Meridian mit der Länge Null geht durch Greenwich bei London. Der Breitenkreis mit dem größten Radius, also genau der mittlere zwischen den beiden Polen heißt Äquator und bekommt die Breite Null zugeordnet. Die Zählung der anderen Winkel verläuft über den eingeschlossenen Winkel des betroffenen Kreises mit dem Nullkreis (bzw. Halbkreis an der Erdachse). Nach Nord bzw. Ost wird positiv gezählt, in die anderen Richtungen negativ. Somit ergeben sich für die folgende Abhandlung die Bezeichnungen:

l - Länge des Punktes P auf der Erdkugel

b - Breite des Punktes P auf der Erdkugel

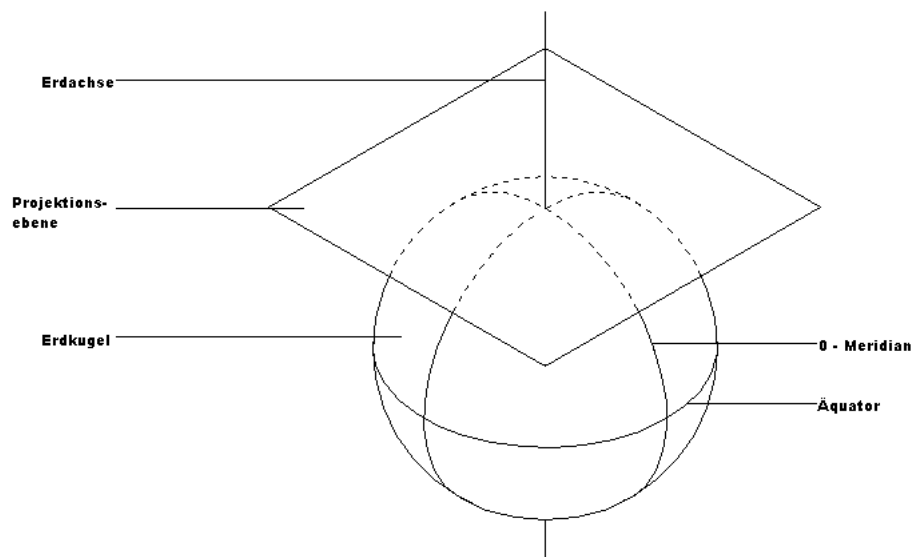
Es gibt weiterhin verschiedene Lagen der Erdkugel zu der Projektionsebene. In der normalen Lage wird der sogenannte Hauptpunkt der Projektion immer der Nordpol bzw. der Südpol sein. D.h. bei den Kegelprojektionen ist die Spit-

ze genau gegenüber des Pols. Bei den azimutalen Projektionen berührt er die Ebene usw. Bei den anderen Lagen werden andere Punkte als Hauptpunkt genommen. Bei der allgemeinen Lage ist dies kein besonderer Punkt, sondern ein beliebiger, bei einer äquatorständigen Projektion ist dies ein Punkt des Äquators. Diese weiteren Lagen werden aber hier nicht betrachtet, da man ein neues Koordinatensystem in diesem neuen Punkt errichten kann, was heißt, daß die neuen Längengrade nicht durch die Pole sondern durch den Punkt und seinen Gegenpunkt gehen. Nun nimmt man einfach die Länge und Breite des neuen Systems und hat somit eine normale Lage erzeugt.

Auch entstehen bei der Projektion zwangsläufig Verzerrungen. Eine Projektion kann nur entweder flächentreu oder winkeltreu sein (oder auch gar nichts von beiden). Flächentreu heißt hier, daß jede beliebige Fläche auf der Kugel den gleich Flächeninhalt wie ihre Projektion hat. Die Winkeltreue ist gegeben, wenn die Tangenten zweier sich schneidender Kreise sich in dem gleichen Winkel schneiden, wie die Tangenten an ihren Projektionen (Die Tangenten müssen natürlich im Schnittpunkt errichtet werden).

Die Herleitungen der Abbildungsgleichungen wurden weitestgehend aus dem Buch "Kartenentwürfe der Erde" von Eberhard Schröder, erschienen bei Verlag Harry Deutsch Thun in Frankfurt am Main 1988, übernommen.

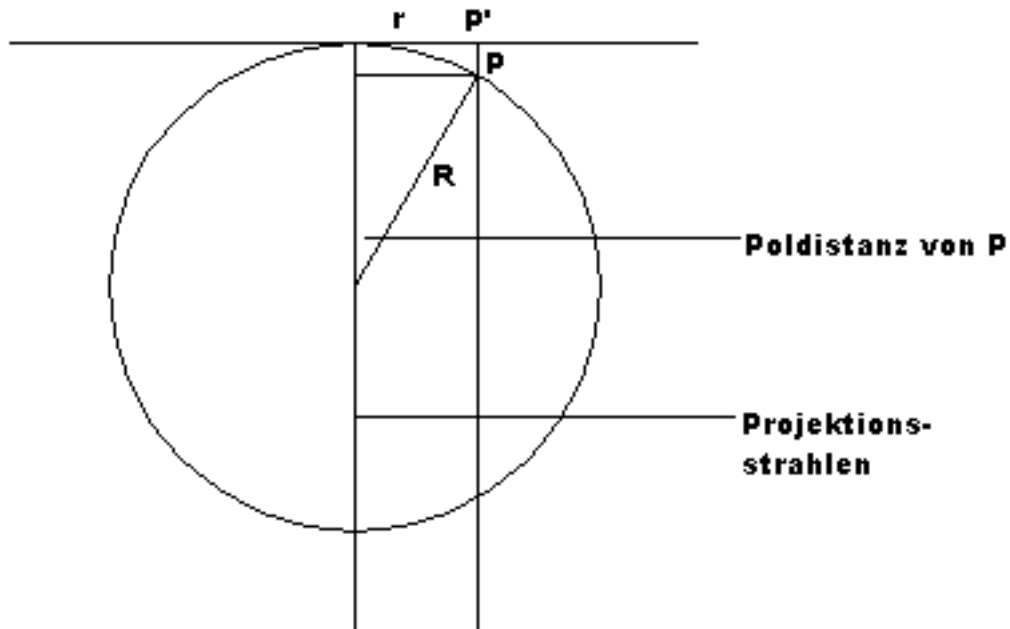
2 Azimutale Entwürfe



Diese haben alle gemeinsam, daß hier direkt von der Kugel auf eine virtuelle Ebene Γ abgebildet wird, welche o.B.d.A. direkt am Nordpol an der Kugel anliegt.

In Γ wird ein Polarkoordinatensystem errichtet, bei dem der Ursprung gleich dem Berührungspunkt der Ebene mit der Erdkugel ist. Die Koordinaten dieses Systems werden üblicherweise mit r und φ bezeichnet. Auch wurde hier zur Verdeutlichung des Sachverhaltes der Erdradius als R bezeichnet. Die Herleitungen der Abbildungsgleichungen wurden aus (2) entnommen.

2.1 Die Orthographische Projektion



2.1.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

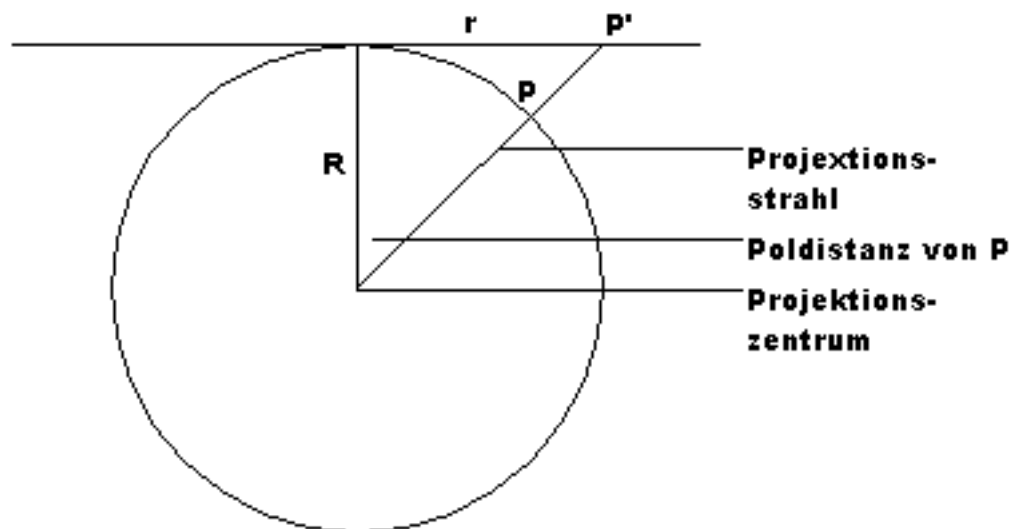
Dies ist eine orthogonale azimutale Projektion, bei der sich das Projektionszentrum im "Unendlichen" befindet, d.h. die Strahlen sind alle parallel. Für die Abbildung des Punktes P ergeben sich somit recht einfache Abbildungsgleichungen:

Wie aus der Abbildungsgleichung ersichtlich werden die Meridiane als Geraden abgebildet, deswegen ergibt sich für die geographische Länge (unter der Annahme, daß der Nullmeridian ein φ von 0 besitzt):

$$l = \varphi$$

Für den Abstand r ergibt sich die Gleichung $r = R * \sin(\frac{\pi}{2} - b)$, da für rechtwinklige Dreiecke die Beziehung $\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothense}}$ gilt. Da R allerdings 1 ist, kann man Gleichung auf $r = \sin(\frac{\pi}{2} - b)$ reduzieren. Das Argument des Sinus hingegen muß $\frac{\pi}{2} - b$ sein, da in der Zeichnung die Poldistanz gefragt ist und nicht die tatsächliche Breite. Die Breitenkreise werden also als einzige unverzerrt abgebildet, d.h. die Halbkugel wird als Kreis abgebildet mit R als Radius, da dies auch der Äquatordradius ist. Für diese Abbildungsart ergeben sich Flächen- sowie Winkelverzerrungen.

2.2 Die gnomonische Projektion



2.2.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Dies ist eine azimutale Projektion, bei der sich das Projektionszentrum in der Kugelmitte befindet. Für die Abbildung des Punktes P ergeben sich somit recht einfache Abbildungsgleichungen:

Wie aus der Abbildungsgleichung ersichtlich werden die Meridiane als Geraden abgebildet, deswegen ergibt sich für die geographische Länge (unter der Annahme, daß der Nullmeridian ein φ von 0 besitzt):

$$l = \varphi$$

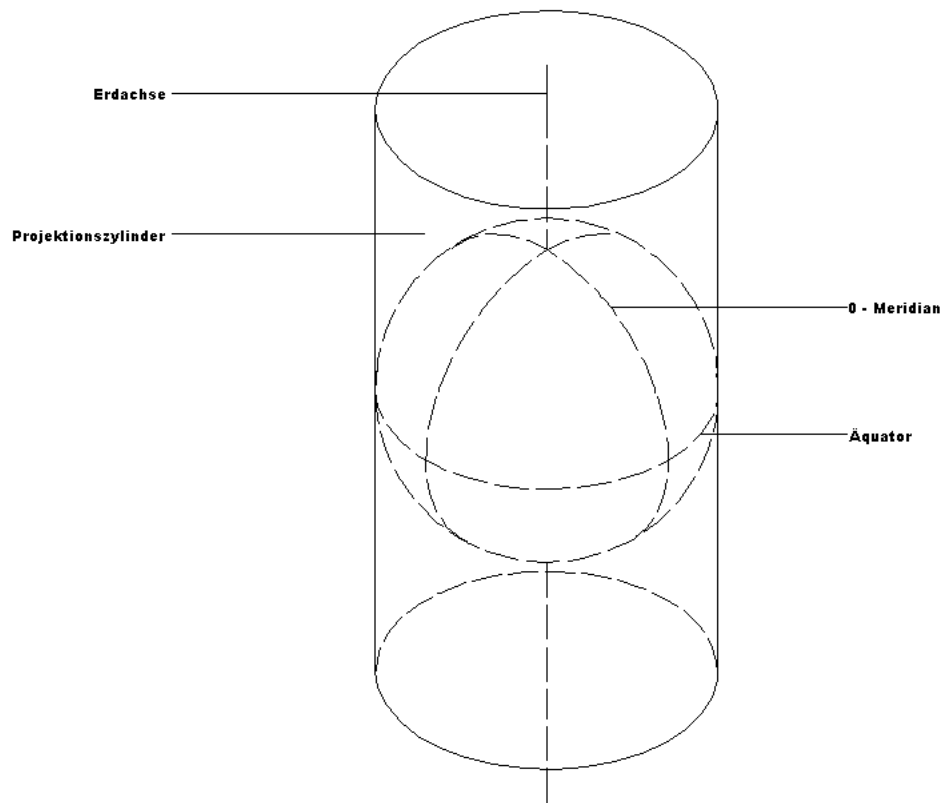
Für den Abstand r ergibt sich die Gleichung $r = R * \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$, da

für rechtwinklige Dreiecke die Beziehung $\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ gilt. Da R allerdings 1 ist, kann man Gleichung auf $r = \tan(\frac{\pi}{2} - b)$ reduzieren. Das Argument des Tangens hingegen muß $\frac{\pi}{2} - b$ sein, da in der Zeichnung die Poldistanz gefragt ist und nicht die tatsächliche Breite. Die Halbkugel wird also auf die gesamte Ebene Γ abgebildet, da der Tangens für große Winkel nach "Unendlich" geht.

2.2.2 Anwendungsbeispiele

Für diese Abbildungsart ergeben sich Flächenverzerrungen, sowie Winkelverzerrungen, sie hat aber trotzdem große praktische Bedeutung erreicht. Dies liegt daran, daß nach der oben beschriebenen Abbildungsvorschrift die Großkreise der Erdkugel als Linie abgebildet werden, da die Ebene dieser Kreise auch das Projektionszentrum enthält. Das heißt also, daß die kürzeste Verbindung auf der Kugel in die kürzeste Verbindung auf der Ebene abgebildet wird, was für Flug - und Schiffsverkehr von Vorteil ist, da die kürzeste Verbindung einfach durch Geradenabschnitte ermittelt werden kann.

3 Zylinderprojektionen



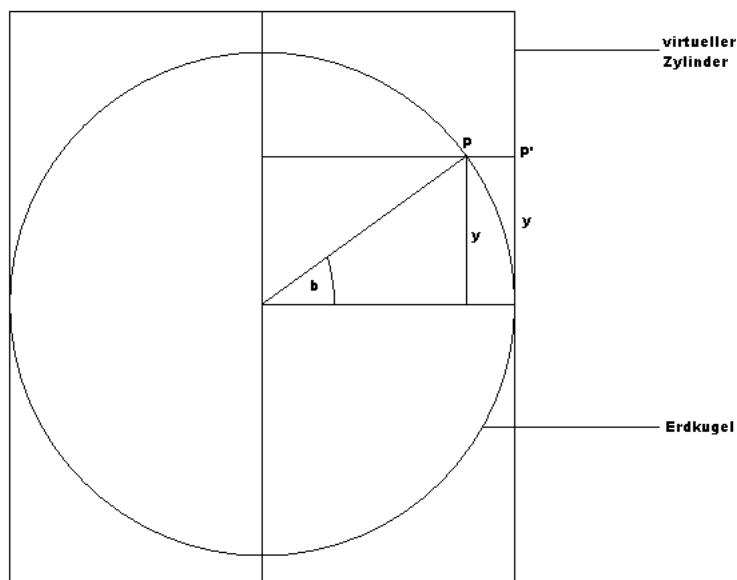
Hier wird sich ein gedachter Zylinder um die Erde vorgestellt. In der normalen Lage sind Erdachse und Zylinderachse identisch und der Äquator berührt die Mantelfläche. Die Abbildung wird so erreicht, daß nach dem Projizieren der Punkte die Mantelfläche gegenüber des Bildes des Nullmeridians aufgeschnitten und danach abgewickelt wird. Somit ergibt sich auch logisch das kartesische Koordinatensystem, welches seinen Ursprung im Schnittpunkt des Bildes des Äquators mit dem des Nullmeridian hat. Die Koordinaten werden üblicherweise mit x und y bezeichnet.

Alle Abbildungsformen haben gemeinsam, daß die Breitenkreise auf den Um-

fang des Zylinder vergrößert werden. Sie erhalten somit eine Streckung um $\frac{1}{\cos b}$. Dies kann man sich leicht über den Kosinussatz im rechtwinkligen Dreieck herleiten.

Dieser lautet bekanntlich: $\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothense}}$.

3.1 Der echte Zylinderentwurf des Archimedes (oder Lambert)



3.1.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Die Abbildung eines beliebigen Punktes P (außer den Polen) erfolgt nun durch die Verlängerung des Lotes von P auf die Zylinderachse über P hinaus auf die Mantelfläche des Zylinders. Der Schnittpunkt des verlängerten Lotes mit der Mantelfläche ist der Bildpunkt P' . Die Pole werden hier als Strecken dargestellt, sie sind nämlich die "Ränder" der entstehenden Karte.

Somit ergeben sich folgende Abbildungsgleichungen:

Für die x - Koordinate ergibt sich somit folgende Gleichung:

$x = l$ (zu beachten ist, daß für negative Längen auch negative Werte einzu-

setzen sind)

Für die y - Koordinate jedoch ergibt sich folgende Formel:

$$y = \sin b \text{ (auch hier gilt obige Anmerkung)}$$

Diese beiden Gleichungen ergeben sich direkt aus der Abbildungsvorschrift.

3.1.2 Anwendungsbeispiele

Bei dieser Projektion wird eine flächentreue Abbildung erzielt. Der Vorteil liegt somit auf der Hand, denn damit lassen sich Größenverhältnisse von Staaten bzw. Wirtschaftsräumen realistisch einschätzen.

Die Winkel können im Allgemeinen in dieser Abbildung nicht real dargestellt werden. Sie ist also ungünstig für eine Verwendung in der Seefahrt, da es hier v.a. auf die Winkel zum Meridian ankommt. Ausnahme sind hier zum Beispiel die Winkel von den Breitenkreisen zu den Meridianen, diese werden nämlich unverfälscht rechtwinklig dargestellt. Dieser Sachverhalt läßt sich insofern erklären, daß Punkte mit gleicher Länge auch in der Abbildung die gleiche x - Koordinate und Punkte gleicher Breite die gleiche y - Koordinate haben. Da die Breitenkreise bzw. Meridiane nun solche Orte von Punkten mit gleicher Breite bzw. Länge darstellen, bilden sie sich als Parallelen zur x - bzw. y - Achse ab, da dies die Orte mit gleicher y - bzw. x - Koordinaten sind. Die Bilder dieser rechtwinklig zueinander stehenden Kreise sind also orthogonale Geraden.

3.2 Der Mercator - Entwurf (winkeltreue)

3.2.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Hier wird von der Lambertschen Projektion ausgegangen. Die Breitenkreise erhalten, wie in jeder Zylinderprojektion die Streckung von $\frac{1}{\cos b}$. Diese Streckung muß nun auch notwendigerweise auf die Meridiane angewandt werden, um eine Winkeltreue zu erreichen (Dies ist natürlich kein Beweis für die entstandene Winkeltreue. Der vollständige Nachweis würde eine Betrachtung der Verzerrung von Kreisen auf der Erdkugel zu Ellipsen in der Abbildung beinhalten, was aber nicht im Rahmen dieser Arbeit liegt. Der vollständige Beweis wird an dieser Stelle also nicht erbracht).

Damit ergibt sich:

$$(1) \quad dy = \frac{db}{\cos b}$$

Diese Gleichung wird auch Mercatorsche Grundformel genannt, obwohl sie nicht von ihm persönlich aufgestellt wurde.

Diese Gleichung wird integriert:

$$(2) \quad y = \int \frac{db}{\cos b} + C = I + C$$

Jetzt betrachtet man folgende goniometrische Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos b &= \sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) * \cos^2\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Nun betrachtet man v :

$$(4) \quad v = \tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Somit ergibt sich, wenn man v nach b ableitet:

$$(5) \quad \frac{dv}{db} = \frac{1}{2 * \cos^2\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Daraus folgt:

$$dv = \frac{db}{2 * \cos^2\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Jetzt setzt man (3) in (2) ein und betrachtet das Integral I:

$$(6) \quad I = \int \frac{db}{2 \tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Durch einsetzen von (4) erhält man:

$$(7) \quad I = \int \frac{db}{2v \cos^2\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Durch einsetzen von (5) erhält man durch anwenden der Fundamentalintegrale:

$$(8) \quad I = \int \frac{dv}{v} = \ln |v|$$

Somit folgt für (2)

(9)

$$y = \ln \left| \tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$$

Da der Äquator im Bild die x - Achse darstellen soll, muß für $b = 0$ auch $y = 0$ sein.

Daraus folgt:

(10)

$$0 = \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| + C$$

woraus folgt $C = 0$, da $\ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = 0$.

Da für den angegebenen Wertebereich $\tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ ist, ergeben sich folgende Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= l \\ y &= \ln \tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

3.2.2 Anwendungsbeispiele

Diese Kartenprojektion ist bei der Seefahrt sehr wichtig, da hier vor allem nach den Winkeln navigiert wird und diese Projektion winkeltreu ist.

Außerdem hat diese Projektionsform bei der Landvermessung eine große Rolle gespielt, da diese früher auch auf trigonometrische Weise erfolgte. Gauß entdeckte nämlich, daß diese Projektion in der Nähe eines des Berührungskreises von Zylinder und Kugel, hier der Äquator, annähernd flächentreu ist.

Er entwickelte diese Gleichungen weiter und konnte somit mit den Ergebnissen der Landvermessung die Größe des Landes gut darstellen.

Dieses Verfahren wurde von Krüger auf den Ellipsoiden verallgemeinert. Hier wird die Kugel in transversale Lage zum Zylinder versetzt, d.h. ein Längengrad ist Berührungskreis mit der Mantelfläche. Jetzt wird in einem Bereich von ca. drei Grad Länge die Abbildungsvorschrift angewendet. Man erhält einen Streifen, in dem sowohl Winkeltreue als auch annähernde Flächentreue gelten. Weil die Kugel gedreht ist, liegt in dem entstandenen Streifen auch ein gedrehtes Koordinatensystem vor. D.h. nach oben geht der x - Wert, der sogenannte Hochwert, zur Seite geht der y - Wert, der sogenannte Rechtswert. Diese Koordinaten werden als Gauß - Krüger - Koordinaten bezeichnet, sie gelten nur in dem betroffenen Streifen. Diese Vorgehensweise wird mit der ganzen Erde wiederholt, so daß viel Streifen entstehen. Dieses System wird als UTM bezeichnet und ist zur Zeit in fast allen NATO - Karten integriert.

3.3 Mittelabstandstreuer Entwurf oder quadratische Plattkarte

Hier schließen sich flächentreue und winkeltreue von vornherein aus, da die Meridiane in wahrer Länge dargestellt werden.

3.3.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Der Zylinder wird so um die Kugel gelegt, daß er sie am Äquator berührt. Jetzt wird die Länge des kürzesten Kreisbogens gemessen, der vom abzubildenden Punkt rechtwinklig auf den Äquator führt. Diese Länge des Kreisbogens wird dann auf den Zylinder aufgetragen, natürlich an der entsprechenden geographischen Länge. Hierdurch wird leicht deutlich, daß dies ein linearer Zusammenhang ist und somit auch die Gleichungen recht schnell aufzustellen sind:

$$y = b$$

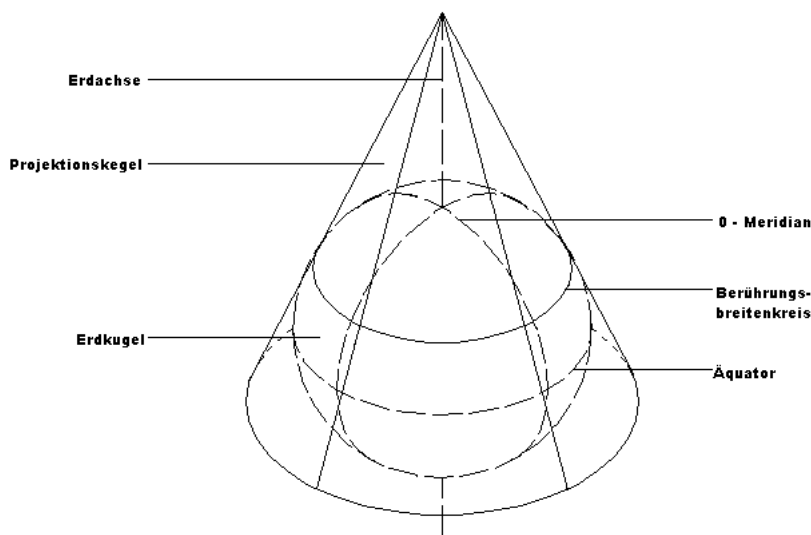
Für negative Breiten sind auch negative Werte einzusetzen

Somit ergibt sich für:

$$x = l$$

Mit diesen Abbildungsvorschriften wird das Gradnetz der Erde als Quadratmuster abgebildet, deswegen auch der Name "quadratische Plattkarte".

4 Kegelentwürfe



Hier wird auf die Erdkugel ein gedachter Kegel aufgestülpt. Der Kegel ergibt nach der Abwicklung jedoch keinen Vollkreis, sondern einen Kreissektor. Auf diesen ist der "Vollkreis" der Erde abgebildet, also muß man einen Faktor k finden, der den Vollwinkel (2π) auf den Winkel des Kreissektors staucht. Diese Stauchung gilt natürlich auch für die geographische Länge.

Jetzt legen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit x und y in den abgewickelten Kegel, so daß die y -Achse mit dem Bild des 0-Meridians zusammenfällt.

Hieraus ergeben sich dann folgende allgemeine Ansätze:

(1)

$$x = \mathcal{F}(h) * \sin kl$$

(2)

$$y = \mathcal{F}(h) * \cos kl$$

Die Poldistanz wurde hier als h bezeichnet, sie ergibt sich als $h = \frac{\pi}{2} - b$. Daraus folgt, daß h immer größer Null und kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2}$ sein muß. Da es sich bei \mathcal{F} um eine Art von Streckung handelt, muß diese auch größer Null sein, da sich sonst das Koordinatensystem umkehren würde. Diese Streckung wird mit zunehmender Poldistanz auch größer, da der abgewickelte Kegel mit zunehmendem Abstand zum Mittelpunkt auch einen größeren Kreisbogen umspannt. D.h. die erste Ableitung dieser Funktion ist auch positiv.

4.1 Winkeltreuer Kegelentwurf

4.1.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Die Bildkoordinaten ergeben sich wie oben (in Abschnitt 4 auf Seite 25) beschrieben.

Durch Vektorrechnung und Differentialgeometrie erhält man:

(1)

$$\sin^2 h = \frac{k^2 * \mathcal{F}^2}{\mathcal{F}'^2}$$

Nach dem Wurzelziehen (welches möglich ist, da alle Größen positiv sind siehe Seite 25, Abschnitt 4):

(2)

$$\sin h = \frac{k * \mathcal{F}}{\mathcal{F}'}$$

Nach der Variablentrennung erhält man:

(3)

$$\frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = k \frac{dh}{\sin h}$$

Durch Integration erhält man (da $\mathcal{F} > 0$):

(4)

$$\ln \mathcal{F} - \ln C = k \int \frac{dh}{\sin h} = k * I$$

Analog ist wie in Abschnitt 3.2.1 auf Seite 19 zu verfahren. Man erhält:

(5)

$$\sin h = 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)$$

Man substituiert:

$$(6) \quad z = \tan\left(\frac{h}{2}\right) \quad z > 0$$

Nun leitet man z nach h ab und erhält:

$$(7) \quad dz = \frac{dh}{2 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)}$$

Jetzt setzt man (5) in (4) ein und erhält für das Integral I:

$$(8) \quad I = \int \frac{dh}{2 \tan\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)}$$

In diese Gleichung werden (6) und (7) eingesetzt, man erhält (da $z > 0$):

$$(9) \quad I = \int \left(\frac{dz}{z}\right) = \ln z$$

Daraus folgt:

$$(10) \quad \ln \mathcal{F} - \ln C = k * \ln z \quad (z > 0)$$

Durch Umformung erhält man:

$$(11) \quad \ln \frac{\mathcal{F}}{C} = \ln z^k$$

Daraus ergibt sich:

$$(12) \quad \frac{\mathcal{F}}{C} = z^k$$

Woraus dann die endgültige Form:

$$(13) \quad \mathcal{F}(h) = C * \left(\tan\left(\frac{h}{2}\right)\right)^k$$

folgt.

Hieraus ergeben sich die Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= C * \left(\tan\left(\frac{h}{2}\right)\right)^k * \sin kl \\ y &= C * \left(\tan\left(\frac{h}{2}\right)\right)^k * \cos kl \end{aligned}$$

Die o.g. Gleichungen haben aber einen entscheidenden Nachteil. Es gibt hier nicht nur den Parameter k , sondern auch noch den Parameter C . Dieser kann aber ersetzt werden, indem man h_0 als die Poldistanz des Berührungsbreitenkreises versteht. Hier gilt (Da $\mathcal{F}(h_0) = C(\tan h_0)^k = \tan h_0$, weil es sich um den Berührungsbreitenkreis handelt):

$$C = \frac{\tan h_0}{\left(\tan\left(\frac{h_0}{2}\right)\right)^k}$$

Somit ergeben sich handlichere Gleichungen, bei denen nur eine Größe variabel ist (da $k = \cos h_0$):

$$\begin{aligned} x &= \tan(h_0) \left(\frac{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}{\tan\left(\frac{h_0}{2}\right)}\right)^k * \sin kl \\ y &= \tan(h_0) \left(\frac{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}{\tan\left(\frac{h_0}{2}\right)}\right)^k * \cos kl \end{aligned}$$

4.2 Flächentreuer Kegelentwurf

4.2.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Die Bildkoordinaten ergeben sich wie in Abschnitt 4 auf Seite 25 beschrieben

Hier ist wieder das Ziel, ein $\mathcal{F}(h)$ zu erhalten.

Durch Anwendung von Vektorrechnung und Differentialgeometrie erhält man folgenden Ansatz:

(1)

$$k^2 \mathcal{F}^2 \mathcal{F}'^2 = \sin^2 h$$

Daraus folgt (da alle Größen positiv sind):

(2)

$$k \mathcal{F}(h) \mathcal{F}'(h) = \sin h$$

Nach einer Variablentrennung folgt daraus:

(3)

$$k \mathcal{F} d\mathcal{F} = dh \sin h$$

Nach dem Integrieren:

(4)

$$k \int (\mathcal{F} * d\mathcal{F}) = \int (\sin h * dh) + C$$

Nach Anwendung der Fundamentalintegrale ergibt dies:

(5)

$$\frac{k \mathcal{F}^2}{2} = -\cos h + C$$

oder

$$k\mathcal{F}^2 = 2(C - \cos h)$$

Da $\mathcal{F}(0) = 0$ sein soll, ergibt sich für diesen Fall:

(6)

$$0 = C - \cos 0$$

daraus folgt $C = 1$, da $\cos 0 = 1$.

Dies in (5) eingesetzt und die Wurzel gezogen, ergibt:

(7)

$$\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{2}{k}} \sqrt{1 - \cos h}$$

Jetzt betrachtet man folgende goniometrische Gleichungen:

durch den trigonometrische Pythagoras

(8)

$$1 - \cos h = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) - \cos\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right)$$

durch Additionstheoreme

(9)

$$\cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) - \cos\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) - (\cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right))$$

Woraus die endgültige Form folgt:

(10)

$$1 - \cos h = 2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$$

Durch einsetzen von (10) in (7) erhält man:

(11)

$$\mathcal{F}(h) = \frac{2}{\sqrt{k}} * \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

Damit erhält man folgende Abbildungsgleichungen:

$$x = \frac{2}{\sqrt{k}} * \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin kl$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{k}} * \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos kl$$

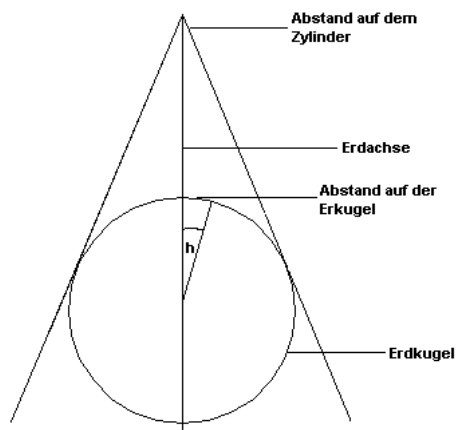
4.2.2 Anwendungsbeispiele

Diese Abbildung hat natürlich wieder die Vorteile einer flächentreuen Projektion, man kann Größenverhältnisse einzelner Länder sehr gut aufzeigen. Interessant ist auch noch, bei welchem Breitenkreis hier auch eine annähernde Winkeltreue festzustellen ist. Dies hängt natürlich von k ab. Durch die Vektorrechnung und Differentialgeometrie ergeben sich (h_0 ist die Poldistanz des besagten Breitenkreises):

$$k = \cos^2\left(\frac{h_0}{2}\right)$$

$$h_0 = 2 \arccos \sqrt{k}$$

4.3 Abstandstreuer Kegelentwurf



4.3.1 Herleitung der Abbildungsgleichungen

Die Gleichung für die Abbildung lässt sich hier leicht ermitteln, indem man einfach in Gleichung (3) als $\mathcal{F}(h)$ die Poldistanz einsetzt, da dies für die Abbildung gleichzeitig der Abstand zwischen Bildpunkt des Poles und Bildpunkt ist.

Also ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= h \sin kl \\y &= h \cos kl\end{aligned}$$

4.3.2 Anwendungsbeispiele

Dieser Entwurf ist jedoch weder vollständig flächentreu noch winkeltreu. Man kann aber eine annähernde Flächentreue an dem Breitenkreis feststellen, wo

der virtuelle Kegel den Erdball berührt. Dies ist günstig für kleinere Bildausschnitte, da die Abbildungsgleichung relativ einfach ist. Für einen bestimmten Breitenkreis mit der Poldistanz h_0 ergibt sich mit Zuhilfenahme der Vektorrechnung und Differentialgeometrie folgende Gleichung:

$$k = \frac{\sin h_0}{h_0}$$

5 Anmerkungen zu den verwendeten Programmiersprachen

5.1 AutoCad

Mit diesem Programm wurden die hier verwendeten Zeichnungen erstellt. Es bot als einziges verfügbares Programm die Möglichkeit, dreidimensionales Zeichnen zu verwirklichen. Somit konnte man die Ansichten der verschiedenen Projektionen gut darstellen. Auch bot es die Möglichkeit, die verschiedenen Elemente der Zeichnung gut zu plazieren, indem man sich auf genaue Pixelangaben stützte konnte, so daß Schnitt- und Berührungspunkte sehr genau realisierbar waren.

5.2 LaTeX

Da LaTeX ein Satzprogramm ist, welches ursprünglich für das Setzen von Formeln verwendet wurde, ergab sich der Grund für die Nutzung von selbst. Auch kann man mit dem Zusatzprogramm "latex2html" diese Dokumentation leicht in HTML – Seiten umwandeln, was auch ein Anliegen dieser Arbeit ist.

Literaturverzeichnis

- (1) Schröder, Dr. Eberhard: Kartenentwürfe der Erde. Frankfurt am Main, 1988, Verlag Harry Deutsch Thun
- (2) Kuntz Eugen: Kartennetzentwurfslehre : Grundlagen und Anwendungen. 2. Aufl. - Karlsruhe,1990, Wichmann
- (3) Internet: <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto> am 17.01.2001 (für die Bilder im Anhang)

Selbständigkeitserklärung

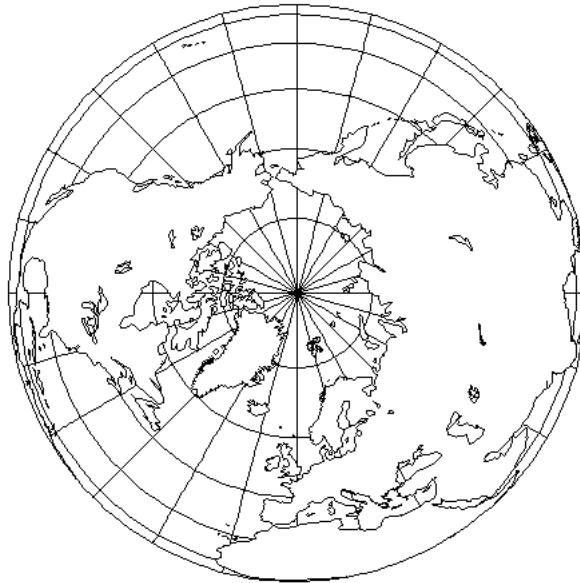
Ich erkläre hiermit, daß ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

A Einige Kartenbeispiele

A.1 Azimutalentwürfe

A.1.1 Orthographische Projektion

Orthographische Projektion

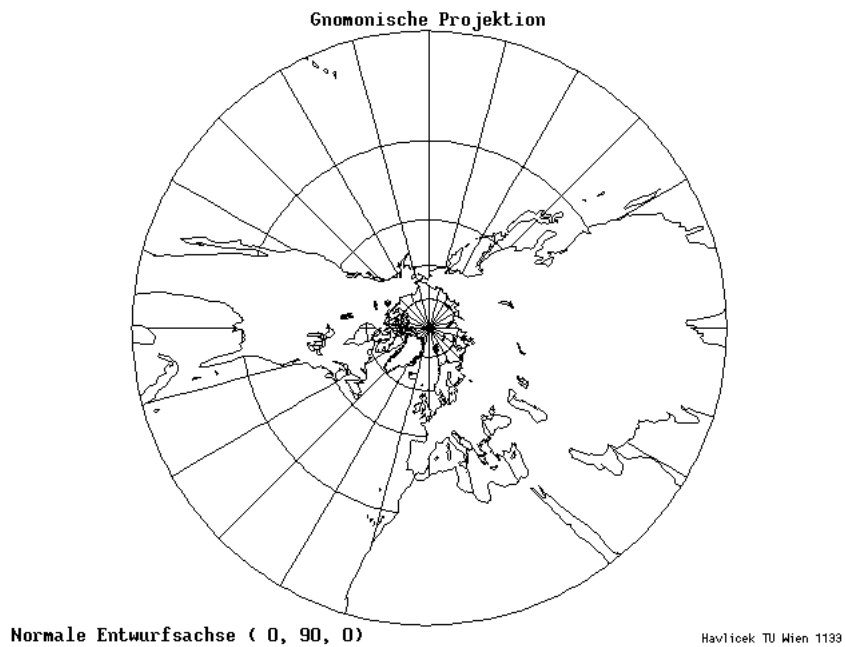


Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1139

Sehr bezeichnend für diese Projektion ist die zu erkennende Stauchung v.a. an den Randgebieten der Karte. Außerdem ist hier die typische Kreisform von azimutalen Projektionen zu sehen.

A.1.2 Gnomonische Projektion

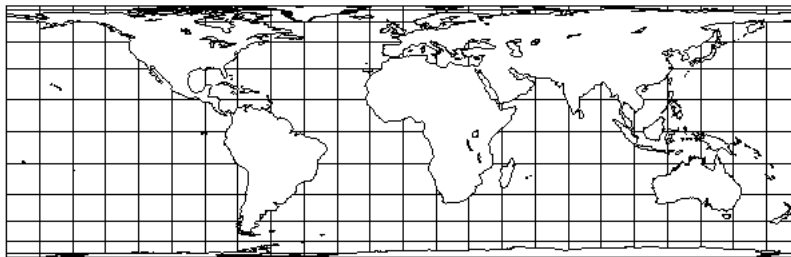


Wie hier zu sehen ist, werden die Kontinente stark verzerrt, außerdem ist auch die Streckung zum Rand hin erkennbar.

A.2 Zylinderentwürfe

A.2.1 Entwurf nach Lambert

Flächentreuer Zylinderentwurf



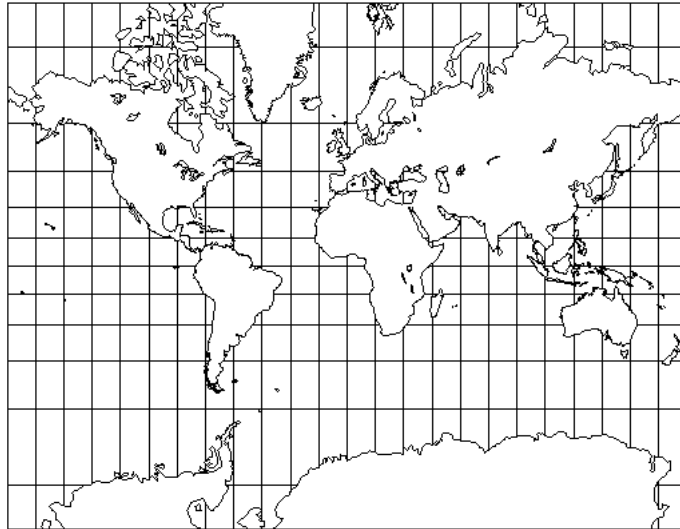
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1133

Sehr gut ist bei dieser Karte die Stauchung in der Nähe der Pole zu sehen.
Es wird also deutlich, daß eine Winkeltreue nicht existiert.

A.2.2 Entwurf nach Mercator

Konformer Zylinderentwurf



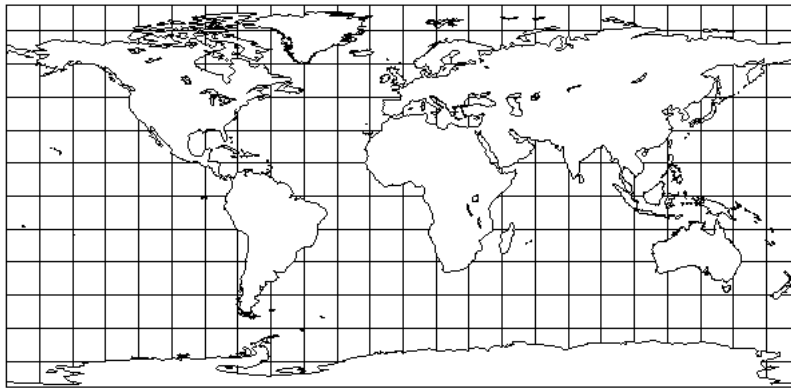
Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1139

Im Vergleich zur vorhergehenden Karte ist hier die typische Streckung der Karte in der Nähe der Pole zu erkennen, diese würde theoretisch bis ins "Unendliche" reichen, wenn sie nicht "abgeschnitten" würde.

A.2.3 Quadratische Plattkarte

Abstandstreuer Zylinderentwurf



Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1139

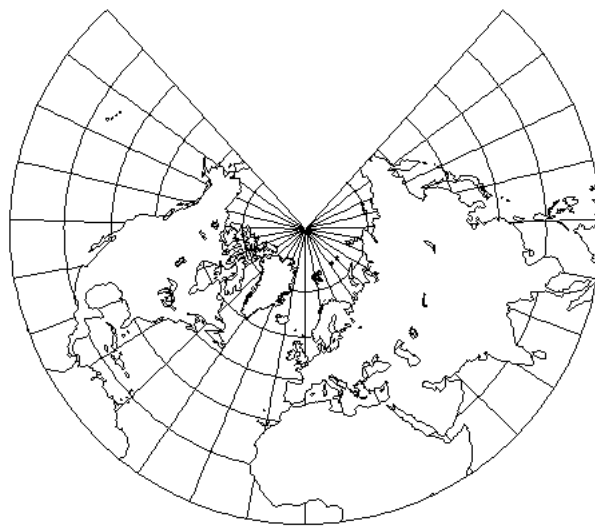
Typisch ist hier das Quadratmuster der Koordinatenlinien, welches nur durch ein Abschneiden der Karte verfälscht wird.

A.3 Kegeltwürfe

Da sich Kegeltwürfe optisch nicht allzu groß unterscheiden lassen, kann man eigentlich nur angeben, daß alle Karten eine typische Form aufweisen.

A.3.1 Winkeltreuer Entwurf

Konformer Kegeltwurf

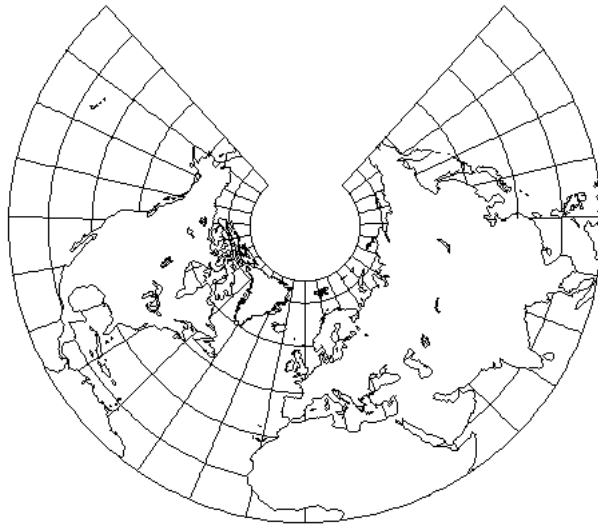


Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1133

A.3.2 Flächentreuer Entwurf

Flächentreuer Kegelentwurf

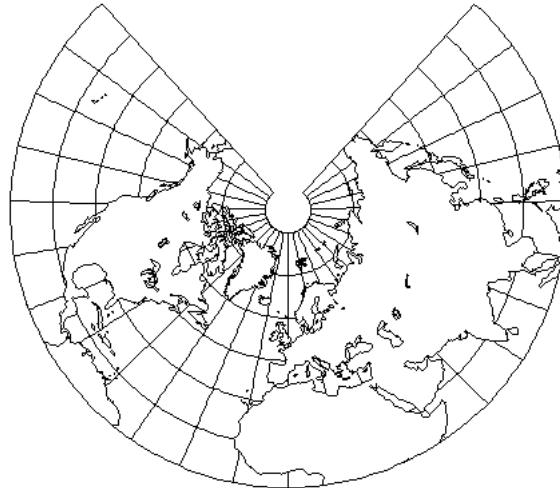


Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1139

A.3.3 Abstandstreuer Entwurf

Abstandstreuer Kegelentwurf



Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Havlicek TU Wien 1139

Kartenentwürfe der Erde

Thesen

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Abbildung der Kugelgestalt der Erde auf eine Ebene. Der Schwerpunkt der Arbeit ist dabei die mathematische Darstellung dieser Projektionen und somit das Aufstellen von Abbildungsgleichungen.

Ein weiterer Schwerpunkt ist die Umsetzbarkeit zu HTML Seiten.

1. Es werden verschiedene Abbildungstypen untersucht, die azimutale Projektion, die Zylinderprojektion und die Kegelprojektion.
2. Aus den verschiedenen existierenden Lagen der Ebene zur Kugel wird hier nur die normale Lage, mit Nord- bzw. Südpol als Hauptpunkt, betrachtet, da sich alle anderen Lagen in diese überführen lassen.
3. Bei einer Abbildung kann es entweder vollständige Winkeltreue oder vollständige Flächentreue geben.
4. Bei manchen Abbildungen existiert neben der vollständigen Flächentreue auch eine teilweise Winkeltreue oder umgekehrt.
5. Bei der azimutalen Projektion liegt die gedachte Abbildungsebene direkt an der Erdkugel an.
6. Bei der Zylinderprojektion wird ein virtueller Zylinder um die Erdkugel gelegt, welcher nach der Abbildung zu einem Rechteck abgewickelt wird.
7. Bei der Kegelprojektion ist die Projektionsebene die Mantelfläche eines Kegels, welcher nach erfolgter Abbildung zu einem Kreissektor abgewickelt wird.
8. Die Umsetzbarkeit in HTML - Seiten wird mit LaTeX erreicht, welches durch ein Zusatzprogramm auch Formeln in Bilder umwandeln kann. Diese Grafiken können dann in eine HTML Seite eingefügt werden.