Projektive Rekonstruktion mittels Invarianten von sechs Punkten aus drei Bildern

Christian Franke
FH Merseburg

Gliederung

- Problembeschreibung
- Invarianten von sechs Punkten & Projektive Rekonstruktion
- Algebraische Geometrie
- Eliminierung
- Implementierung
- Ergebnisse
- Zusammenfassung

Problembeschreibung

Ziel:
- Invarianten von sechs Punkten aus drei Bildern berechnen
- dreidimensionale Konfiguration aus Bildern und Invarianten rekonstruieren

Ergebnis:

projektiv rekonstruierte Konfiguration

Ausgangssituation:

- Bilder sind unkalibriert (Kameras sind nicht geeicht)
- Punktentsprechungen in den Bildern sind bekannt (Punkte in allg. Lage)

Invarianten von 6 Punkten & Projektive Rekonstruktion

- sechs Punkte haben die Dimension 18
- GL(3) durch 4x4 Matrix beschrieben
- Matrix hat 15 Freiheitsgrade

-> 6 Punkte haben 3 absolute / funktionell unabhängige Invariante

- Darstellung der drei Invarianten durch Beziehung der Verhältnisse der Koordinaten des 6. Punktes (X,Y,Z,T) zu der durch die anderen 5 Punkte erzeugten Basis

$$
\begin{aligned}
u_i : v_i : w_i = {} & (t_{11}X_i + t_{12}Y_i + t_{13}Z_i + t_{14}T_i) : \\
& (t_{21}X_i + t_{22}Y_i + t_{23}Z_i + t_{24}T_i) : \\
& (t_{31}X_i + t_{32}Y_i + t_{33}Z_i + t_{34}T_i) :
\end{aligned}
$$

-> Skalierungsfaktor eliminiert

-> 2 unabhängige Gleichungen je Punkt

-> 6 Punkte -> 12 Gleichungen

Nach Eliminierung der Kameraparameter ergibt sich eine homogene Gleichung in X,Y,Z und T

Beziehung zwischen Bild- und Raumpunkten:

$$w_6(u_5 - v_5)XY + v_6(w_5 - u_5)XZ + u_5(v_6 - w_6)XT + u_6(v_5 - w_5)YZ + v_5(w_6 - u_6)YT + w_5(u_6 - v_6)ZT = 0$$

mögliche absolute Invarianten:
alpha = XZ/ZT; beta = YZ/ZT; gamma = XZ/XT

- Beziehung der relativen Invarianten gilt für jedes Bild -> 3 homogene quadratische Gleichungen
- relative Invarianten jedes Bildes bestimmbar

-> maximal 3 weitere Schnittpunkte (5 bekannt)

Alpha, Beta und Gamma

- Eliminierung von z.B. Y und Z aus den 3 homogenen Bildgleichungen

-> $a_1X^3 + a_2X^2T + a_3XT^2 + a_4T^3 = 0$
(Koeffizienten sind bekannt)

-> Lösung einer kubischen Gleichung

-> maximal 3 Lösungen für X/T (= alpha)

-> anschließend Y:Z:1 bestimmen

(Bei 5 Bildern -> linearer Ansatz möglich)

Projektive Rekonstruktion

- Kameras nicht geeicht
-> Projektionsmatrizen gesucht

- Invarianten erlauben Bestimmung der Projektionsmatrix

- Projektionsmatrizen erlauben aufstellen eines linearen Gleichungssystems (je Bild und Punkt 2 Gleichungen)

- 3 Gleichungen genügen zur Ermittlung der Koordinaten eines Punktes

$$\mathbf{T}_{3\times4}\,(X_i, Y_i, Z_i, T_i)^T = (u_i, v_i, w_i)^T \;,\; i=1,\ldots,6$$

$$
\begin{aligned}
w_i^1 t_{11}^1 X_i - u_i^1 t_{33}^1 Z_i &= -(w_i^1 - u_i^1)\\
w_i^1 t_{22}^1 Y_i - v_i^1 t_{33}^1 Z_i &= -(w_i^1 - v_i^1)\\
w_i^2 t_{11}^2 X_i - u_i^2 t_{33}^2 Z_i &= -(w_i^2 - u_i^2)\\
w_i^2 t_{22}^2 Y_i - v_i^2 t_{33}^2 Z_i &= -(w_i^2 - v_i^2)\\
w_i^3 t_{11}^3 X_i - u_i^3 t_{33}^3 Z_i &= -(w_i^3 - u_i^3)\\
w_i^3 t_{22}^3 Y_i - v_i^3 t_{33}^3 Z_i &= -(w_i^3 - v_i^3)
\end{aligned}
$$

Algebraische Geometrie

Varietät (affin):

- gemeinsame Nullstellen einer Menge von Polynomen

Polynomideal (inhomogen):

- Ideal, bestimmt durch eine Varietät (erzeugt durch ein oder mehrere Polynome)

- Jedes Ideal in $k[x_1,...,x_n]$ ist erzeugt durch endliche Anzahl von Polynomen (Hilbertscher Basissatz)

-> Gröbnerbasis

Eliminierung

Problem: eine oder mehrere Variablen aus einem System von Polynomen eliminieren

Eliminierungsideal : I_k = I geschnitten mit $k[x_{k+1},...,x_n]$

Sei G eine Gröbnerbasis von I

-> G_k = G geschnitten mit $k[x_{k+1},...,x_n]$

Abbildung: $R^4 \to R^2$
($k[X,Y,Z,T] \to k[X,T]$)

- Beziehungsgleichungen erzeugen ein Ideal I
- G sei Gröbnerbasis des Ideals I

-> G_{YZ} ist die Gröbnerbasis des Eliminierungs-ideals I_{YZ}

Praktisch (z.B. mit Macaulay):

- (1) $k[X,T] \to k[X,Y,Z,T]$

- (2) $k[X,Y,Z,T] \to k[X,Y,Z,T]/I$

-> $\mathrm{Ker}(1 \circ 2) = G_{YZ}$

Implementierung

- liefert unter Angabe der Bildpunkte die absoluten Invarianten der entsprechenden Raumpunkte

- Invarianten können zur projektiven Rekonstruktion genutzt werden

- Implementierung als COM Objekt in C++

- unter Visual Studio .net

Ergebnisse

- Test der Invarianten ohne und mit Rauschpegel von +/- 1, +/- 2.5 und +/- 5 Pixel

Verwendete Punkte: $(0.0, 0.0, -1.76)^T$,
$(0.75, 0.0, -1.5)^T$,
$(0.0, 1.2, -1.5)^T$,
$(-0.35, 1.2, 2.1)^T$,
$(0.75, 0.0, 2.1)^T$,
$(0.75, 1.2, 2.1)^T$

Blattkombination	α	β	γ
1,2,3	**3.38751**	**1.05363**	**-0.114172**
1,3,4	0.85071	0.560921	0.843592
	3.38751	**1.05363**	**-0.114172**
	1.03658	1.11218	1.0181
1,2,4	**3.38751**	**1.05363**	**-0.114172**
1,3,5	0.022251	0.030986	0.027715
	3.38751	**1.05363**	**-0.114172**
	1.89968	1.86172	2.44073
1,4,5	-0.027292	0.27081	0.0924102
	3.38751	**1.05363**	**-0.114172**
	1.6007	1.30849	-2.41713
2,3,4	0.623404	-0.128241	0.734657
	3.38751	**1.05363**	**-0.114172**
	0.922032	0.743996	1.06132
1,2,5	**3.38751**	**1.05363**	**-0.114172**
2,3,5	0.044102	0.064415	0.0397633
	3.38751	**1.05363**	**-0.114172**
	0.903477	0.910122	0.842652
2,4,5	**3.38751**	**1.05363**	**-0.114172**
3,4,5	-0.352516	-1.166	-0.001605
	22.842	1.25797	-0.088649
	3.38751	**1.05363**	**-0.114172**

Bildkombination	$\alpha = 3.38751$	$\beta = 1.05363$	$\gamma = -0.114172$
1,2,3	**3.61825**	**1.04583**	**-0.077929**
1,3,4	**3.4628**	**1.04872**	**-0.111406**
1,2,4	**3.47069**	**1.04849**	**-0.110103**
1,3,5	**3.46767**	**1.04862**	**-0.110266**
1,4,5	**3.45922**	**1.04898**	**-0.110769**
2,3,4	**3.55653**	**1.05199**	**-0.108229**
1,2,5	**3.54774**	**1.05127**	**-0.10816**
2,3,5	**3.52856**	**1.05088**	**-0.108677**
2,4,5	**3.50203**	**1.05059**	**-0.109566**
3,4,5	**3.50434**	**1.05116**	**-0.109753**
m	3.51178	1.04965	-0.106486
σ	0.0514881	0.00185859	0.0100897

Zusammenfassung

- Ergebnisse der Invarianten stabil, auch bei relativ hohem Rauschpegel

-> praktische Verwendung ist sinnvoll (z.B. zur projektiven Rekonstruktion)

-„Algebraische Geometrie“ kann m.H. entsprechender Software effizient zur Eliminierung von Variablen eingesetzt werden

Literaturverzeichnis (Auszug)

D.A. Cox, J. Little, D. O‘Shea: Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, Springer-Verlag New York, USA, 1992.

O. Faugeras, Q.-T. Luong, contributions from T. Papadopoulo: The geometry of multiple images: the laws that govern the formation of multiple images of a scene and some of their applications, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 2001.

L. Quan: Invariants of Six Points and Projective Reconstruction, IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. 17, No. 1, January 1995.