Moderne Entwicklungen im symbolischen Rechnen. Computermathematik und Schule

Vortrag auf dem Casio Teach & Talk

13. Januar 2012 in Coswig

Prof. Dr. H.-G. Gräbe

http://bis.informatik.uni-leipzig.de/HansGertGraebe

Warum Mathematik?

These 1: Mathematik als Grundlage von *Rechenkompetenz* – der Fähigkeit, die Folgen eigener Handlungsmöglichkeiten quantitativ abzuschätzen.

These 2: Mathematik als Grundlage von *Sprachkompetenz* – der Fähigkeit, über die quantitativen Folgen gemeinsamer Handlungsmöglichkeiten zu kommunizieren.

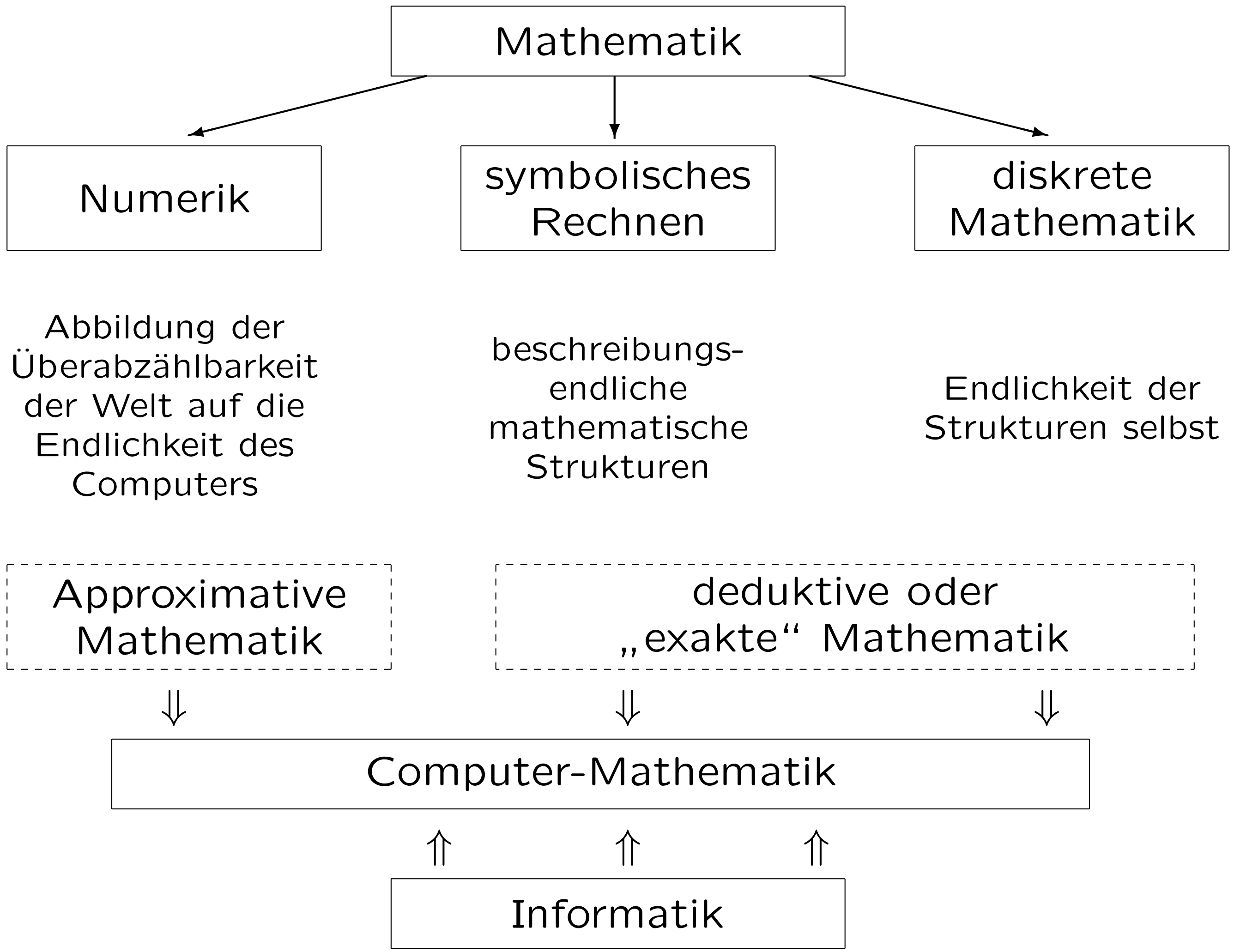
These 3: Mathematik als Grundlage von *Gestaltungskompetenz* – der Fähigkeit, Handlungsmöglichkeiten zur gemeinsamen Gestaltung der eigenen Lebensbedingungen vernünftig auszuwählen und umzusetzen.

Zur Genese einer Computermathematik

1920er Jahre: Im Zusammenhang mit grundlegenden Fragen der mathematischen Logik großer Boom der konstruktiven Mathematik

1970er Jahre: Eine zentrale Rolle spielen nichtnumerische Applikationen einer „Mathematik mit dem Computer“ wie Anwendungen der diskreten Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie) oder der diskreten Optimierung, die *endliche* Strukturen untersuchen, welche sich *exakt* im Computer reproduzieren lassen.

Computeralgebra hat mathematische Konstruktionen zum Gegenstand, die zwar syntaktisch endlich (und damit *exakt* im Computer darstellbar) sind, aber semantisch unendliche Strukturen repräsentieren können. Sie kommt damit mathematischen Arbeitstechniken näher als Anwendungen und implementierte Kalküle der numerischen oder diskreten Mathematik.



Die Genese der Computermathematik

Drei aktuelle Entwicklungen

Mathematica: „The only fully integrated environment for technical computing“ – http://www.wolframalpha.com

Sage: A free open-source mathematics software system licensed under the GPL. It combines the power of many existing open-source packages into a common Python-based interface. Mission: Creating a viable free open source alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab. – http://sagemath.org/

Wiris: ... das leistungsstarke Lern-Computeralgebrasystem für den PC. Es ist besonders gut für den Einsatz in Schulen und Universitäten geeignet. WIRIS ist bereits in zahlreichen Ländern der Welt erfolgreich im Einsatz. – http://www.kapieren.de/de/wiris-cas.html

System	aktuelle Version	Webseite	Einzel-lizenz	Studenten-version
Axiom	Sept 2011	`www.axiom-developer.org`	Open Source	
GAP	4.4.12	`www.gap-system.org`	kostenfrei	
Magma	2.17-12	`magma.maths.usyd.edu.au`	ca. 1200 $	100 $
Maple	15	`www.maplesoft.com`	1245 €	100 €
Mma	8	`www.wolfram.com`	1345 €	128 €
Maxima	5.24.0	`maxima.sourceforge.net`	Open Source	
Matlab MuPAD	2011b 5.5	`www.mathworks.com`	nicht öffentlich	nicht öffentlich
Reduce	3.8	`www.reduce-algebra.com`	Open Source	
Sage	4.7.1	`www.sagemath.org`	Open Source	
Wiris		`www.wiris.com` `www.kapieren.de`	39 €	39 €

Wichtige Computeralgebrasysteme allgemeiner Ausrichtung
im Überblick (Stand Oktober 2011)

Eine Bestandsaufnahme

These 4: Mit diesen Kompetenzen hat die mediale Mehrheit der Deutschen so wenig am Hut, dass uns mittlerweile die Fachkräfte ausgehen.
MINT – Zukunft schaffen ruft müde die Politik.

These 5: Mit dem Computer hält *Technik* in das dafür überhaupt nicht vorbereitete deutsche Gymnasium Einzug.

These 6: *Computermathematik im Schulunterricht* steht im Schnittpunkt all dieser ungeliebten Entwicklungslinien.

Ein Beispiel aus dem Sächsischen Abitur

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k, k \in \mathbb{R}$, welche durch

$$f_k(x) = e^{-x/2} + \frac{k}{x}$$

für $x \neq 0$ definiert ist.

a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen zweier beliebiger Funktionen der Funktionenschar f_k nicht schneiden.

b) Geben Sie für die Funktionen f_{-2} und f_2 jeweils Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema an.

c) Leiten Sie aus b) eine Vermutung über die Existenz von lokalen Extrempunkten der Funktionen f_k für allgemeines k (in Abhängigkeit von k) ab und beweisen Sie Ihre Vermutung.

   Analysieren Sie insbesondere den Fall $k < 0$ genau.

(Quelle: Sächsisches Abitur 2001, Leistungskurs Mathematik)

Diskussion des Beispiels mit **Wolfram Alpha:** Natürlich-sprachliche Eingabe (natürlich in Englisch)

```
solve e^(-x/2)+(2/x) == 0
solve e^(-x/2)+(-2/x) == 0

solve D[e^(-x/2)+(2/x),x] == 0
solve D[e^(-x/2)+(-2/x),x] == 0

plot {E^(-x/2)+(-.3/x), E^(-x/2)+(-.2/x)} from x=0 to 6
```

Mathematica: Funktionenscharen als Funktionen von Funktionen, $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$. Anschreiben in funktionaler Schreibweise. Problem: Das CAS weiß zuviel.

```
f[k_][x_]:=(E^(-x/2))+(k/x)
```

`f[k]'[x]` ergibt $-\frac{1}{2}\,\exp\left(-\frac{x}{2}\right) - \frac{k}{x^2}$

```
Plot[Table[f[k][x],{k,-3,0,.4}],{x,-3,3},PlotRange->{-3,10}]
```

Für manche $k < 0$ gibt es für $x > 0$ weitere Extremwerte!

Dafür muss $x^2 \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = -2\,k$ sein.

Hilfsfunktion `h[x_]:=E^(-x/2) * x^2`

Die Hilfsfunktion hat zwei Extrema, eins bei $x = 0$ und ein weiteres bei $x = 4$. Die Gleichung $h[x] = -2\,k$ hat damit stets genau eine Lösung im Bereich $x < 0$ und für $0 < -k < h[4] = 8/E^2$ zwei weitere Lösungen im Bereich $x > 0$.

Maxima: Anschreiben als Ausdrücke, Spezialisierung durch lokale Substitution. Problem: Das CAS kann zu wenig.

```
f:exp(-x/2)+(k/x);
plot2d(ev(f,k=2),[x,-5,5],[y,-10,10],[ylabel,"f_2(x)"]);
df:diff(f,x);
plot2d(ev(df,k=2),[x,-5,5],[y,-10,10],[ylabel,"d(f_2(x))/dx"]);

f2:ev(f,k=2);
df2:diff(f2,x);
ddf2:diff(f2,x,2);
plot2d([f2,df2,ddf2],[x,-5,5],[y,-10,10],[ylabel,"y"]);
solve(f2,x); /* liefert nonsens */
find_root(f2,x,-2,-1); /* - 1.134286580819568 */
```

Warum und welche Mathematik mit dem Computer auch in der Schule?

Die Mathematik als *lingua franca* hat ihr Pendant in der Programmiersprache des eingesetzten CAS, mit deren Hilfe Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden (können), mathematische Probleme so weit und so stringent sprachlich aufzubereiten, dass sie sogar ein „dummer“ Computer versteht.

Die hierfür zu entwickelnde und zu erwerbende Ausdrucksfähigkeit besteht aus zwei Komponenten – der (möglichst raschen) Beherrschung eines kleinen Instrumentariums nützlicher und immer wiederkehrender Kontrollfluss-Strukturen und der (inkrementellen) Erschließung der mathematischen und syntaktischen Bedeutung konkreter Funktionen in der Einheit von Methoden- und Interpretationskompetenz.

Der Computer* ist ein geduldiger Lehrer für einen derartigen explorativen Zugang zu *Mathematik als Sprache*. Er vermag auf den individuellen Erkenntnisstand differenziert einzugehen, erlaubt gruppendynamische Lerner-Szenarien und gibt schnelles Feedback.

Der Einsatz von Taschenrechnern oder CAS ohne derartige ausgebaute Sprach-, also Programmierfähigkeit oder Abstinenz in der Nutzung derselben verstellt hier gründlich den Blick auf Mögliches und Wünschenswertes.

*So fetischisiert ist das hier natürlich nicht gemeint. Im Hintergrund steht immer das von konkreten Lehrerinnen und Lehrern pädagogisch durchdachte Einsatzszenario des Werkzeugs.