Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 6

Hinweise:

- Abgabeschluss der Hausaufgaben: **22.01.2019** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die Hausaufgaben werden in der Hörsaalübung am 28.01. besprochen.
- Dies ist eine **nachgebesserte Version** der Serie. Sollten Sie die erste Version der Serie bearbeitet haben entsteht Ihnen hieraus kein Nachteil in der Bewertung.

Hausaufgabe 6.1

(a) Ash hat beim Stöbern auf dem Dachboden zwei alte Verknüpfungstafeln gefunden. Leider sind diese vergilbt und nur noch schwer lesbar. Sie erkennt jedoch, dass es sich um Verknüpfungstafeln von Abelschen Gruppen mit neutralem Element e handelt. Mit Mühe schafft sie es außerdem, die folgenden Einträge der Verknüpfungstafeln zu entziffern.

$\otimes$	e	a	b	c
e				
a		b		
b				
c				

$\oplus$	e	a	b	c
e				
a			c	
b				
c				e

Erleichtert stellt sie fest, dass sich die Verknüpfungstafeln aus diesen Informationen eindeutig rekonstruieren lassen.

(i) Vervollständigen Sie die obigen Verknüpfungstafeln so, dass mit den auf diese Weise definierten Operationen $\otimes$ und $\oplus$ und geeigneten Abbildungen $\cdot^*$ und $-\cdot$ die Strukturen $(\{e,a,b,c\},\otimes,\cdot^*,e)$ und $(\{e,a,b,c\},\oplus,-\cdot,e)$ jeweils eine Gruppe bilden. (2)

Hinweis: Da sich die Abbildungen $\cdot^*$ und $-\cdot$ eindeutig aus den vervollständigten Verknüpfungestafeln ergeben, müssen Sie diese nicht angeben.

(ii) Da Ash eine Abneigung gegen Redundanz hat, möchte sie nun feststellen, ob beide Verknüpfungstafeln durch Umbenennung der Elemente aus $\{e,a,b,c\}$ auseinander hervorgehen. (2)

Geben Sie hierzu entweder einen Isomorphismus zwischen

$$(\{e,a,b,c\},\otimes,\cdot^*,e) \text{ und } (\{e,a,b,c\},\oplus,-\cdot,e)$$

aus (i) an oder beweisen Sie, dass die beiden Gruppen nicht isomorph zueinander sind.

(iii) Außerdem stellt Ash erheitert fest, dass sich die Gruppe $(\{e,a,b,c\},\oplus,-\cdot,e)$ durch eine zweite Operation $\odot$ zu einem Körper $(\{e,a,b,c\},\oplus,\odot,-\cdot,\cdot^{-1},e,a)$ erweitern lässt. (1)

Vervollständigen Sie hierzu die folgende Verknüpfungstafel so, dass mit der auf diese Weise definierten Operation $\odot$ und einer geeigneten Abbildung $\cdot^{-1}$ die Struktur $(\{e,a,b,c\},\oplus,\odot,-\cdot,\cdot^{-1},e,a)$ einen Körper bildet.

$\odot$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

Hinweis: Wie auch in (i) müssen Sie die Abbildung $\cdot^{-1}$ nicht angeben.

(b) Berechnen Sie über $\mathbb{R}$: (4)

$$(2x^5+\sqrt{2}x^4-2x^3-\sqrt{2}x^2-4x-\sqrt{8}):(2x^2-\sqrt{2}x-2).$$

Berechnen Sie über $\mathbb{Z}_5$:

$$([2]x^3+[3]x^2+[-1]):([2]x-[3]).$$

Die Berechnung soll in nachvollziehbarer Weise erfolgen.

Hausaufgabe 6.2

(a) Betrachten Sie die folgenden Graphen

$$\begin{aligned} G_1 &= (V_1, E_1) \\ &= \big(\{a,b,c,d,e\}, \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,e),(c,d),(c,e),(b,d),(d,e)\}\big) \end{aligned}$$

und

$$G_2 = (V_2, E_2) = \big(\mathbb{N}, \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \neq y,\ x \div 5 = y \div 5\}\big).$$

Hinweis: Es bezeichnet $\div$ die ganzzahlige Division ohne Rest, d. h.

$$x \div y = \max\{z \in \mathbb{N} \mid z \cdot y \leq x\}$$

(i) Stellen Sie G_1 und G_2 grafisch dar. (2)

(ii) Überprüfen Sie für beide Graphen die folgenden Eigenschaften und begründen Sie Ihre Antwort kurz. Der Graph G_i (für $i \in \{1,2\}$) ist (4)

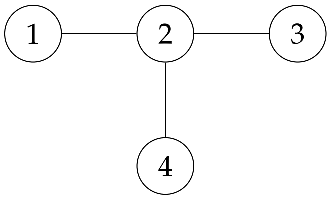
- endlich,
- ungerichtet,
- kreisfrei,
- **schlingenfrei**.

Hinweis: Die hervorgehobene Stelle wurde nachträglich geändert.

(b) Wie viele paarweise nicht-isomorphe Bäume mit sechs Ecken gibt es? Stellen Sie sie grafisch dar. (2)

Hinweis: Der Begriff Baum ist in Seminaraufgabe 6.4 (b) definiert.

(c) Wie viele zu nachfolgend abgebildetem Baum isomorphe Bäume auf der Eckenmenge $E = \{1,2,3,4\}$ gibt es? (1)



(d) Entscheiden Sie: (2)

	wahr	falsch
~~Jeder Baum ist planar.~~	—	—
Es gibt einen Baum mit genau 2018 Ecken und 2019 Kanten.		
Es gibt einen Baum mit Graden 3,2,2,2,1,1,1,1,1.		
Es gibt einen Baum mit Graden 3,3,2,2,1,1,1,1.		

Hinweis: Die Aussage *„Jeder Baum ist planar."* wird **nicht gewertet**. Drei korrekte Antworten liefern zwei Punkte und zwei korrekte Antworten liefern einen Punkt.

Seminaraufgabe 6.3 (Körper)

(a) Vervollständigen Sie die Struktur $(\{a, b, c, d, e\}, \oplus)$ durch Ausfüllen der Verknüpfungstafel zu einer Abelschen Gruppe mit geeigneter Inversenabbildung und geeignetem neutralen Element.

$\oplus$	a	b	c	d	e
a	c				
b					
c					
d				d	
e	b		d		

(b) Geben Sie entweder einen Isomorphismus zwischen

$$\big(\mathbb{Z}_8, +_8, -\cdot, [0]\big) \text{ und } \big(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \oplus, \ominus\cdot, ([0]_4, [0]_2)\big)$$

an oder beweisen Sie, dass die beiden Gruppen nicht isomorph zueinander sind. Hierbei bezeichnet $\oplus$ die komponentenweise Verknüpfung mit

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a +_4 a', b +_2 b')$$

und $\ominus$ die komponentenweise Inversenabbildung mit analoger Definition.

(c) Berechnen Sie über $\mathbb{R}$:

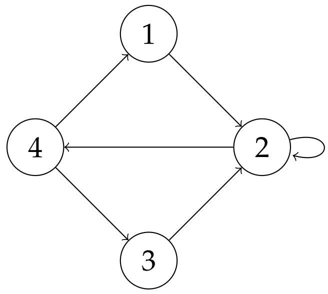
$$(-x^3 + 6x^2 + 19x - 84) : (x^2 + x - 12).$$

Berechnen Sie über $\mathbb{Z}_7$:

$$(x^3 + x + [4]) : ([5]x - [3]).$$

Seminaraufgabe 6.4 (Graphen)

(a) Betrachten Sie die grafische Darstellung des Graphen $G = (E, K)$:



(i) Geben Sie die Ecken- und Kantenmengen E, K von G in Mengenschreibweise an.

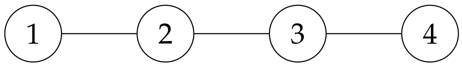
(ii) Geben Sie die Menge $V(2)$ an und bestimmen Sie aus-grad(2).

(iii) Bestimmen Sie alle starken Zusammenhangskomponenten von G.

(iv) Sei $E' = E \setminus \{2\} \subseteq E$. Ist der E'-Teilgraph G' von G ein Baum?

(b) Ein ungerichteter Graph heißt *Baum* genau dann, wenn er schlingen- und kreisfrei ist und genau eine starke Zusammenhangskomponente besitzt.
Wie viele paarweise nicht-isomorphe Bäume mit fünf Ecken gibt es? Stellen Sie sie grafisch dar.

(c) Wie viele zu nachfolgend abgebildetem Baum isomorphe Bäume auf der Eckenmenge $E = \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es?



(d) Zeigen Sie: Für jeden ungerichteten, schlingenfreien Graphen $G = (E, K)$ mit n Ecken sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) G ist ein Baum.

(ii) Für je zwei Ecken e und f von G gibt es genau einen Pfad von e nach f.

(iii) G besitzt genau eine starke Zusammenhangskomponente, aber für jede Kante $(x, y) \in K$ besitzt $G' = \big(E, K \setminus \{(x, y), (y, x)\}\big)$ mehr als eine starke Zusammenhangskomponente.

(iv) G besitzt genau eine starke Zusammenhangskomponente und hat genau $2n - 2$ Kanten.

(v) G ist kreisfrei und hat genau $2n - 2$ Kanten.

(vi) G ist kreisfrei und es gilt: Sind $v, w \in E$, aber $(v, w) \notin K$, so enthält der Graph $G'' = (E, K \cup \{(v, w), (w, v)\})$ genau einen Kreis bis auf Anfangsknoten und Umlaufsinn.

Hinweis: Diese Aufgabe wurde nachträglich korrigiert.