Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 5

Hinweise:

- Abgabeschluss der Hausaufgaben: **08.01.2019** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die Hausaufgaben werden in der Hörsaalübung am 14.01. besprochen.

Hausaufgabe 5.1

(a) Entscheiden Sie zu jeder der gegebenen partiell geordneten Mengen, ob sie einen Verband bildet. Begründen Sie ihre Antworten.

(i) $(\mathbb{N}, R_1)$ mit (2)

$$R_1 = \bigcup_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m>n}} \{(2m,2n),(2m+1,2n),(2m,2n+1),(2m+1,2n+1),(n,n)\}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst R_1 eingeschränkt auf $\{0,1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{N}$.

(ii) $(\mathbb{R}, R_2)$ mit (2)

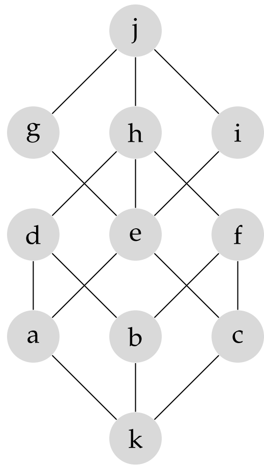
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \leq y,\ [x,y] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset\} \cup \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

(b) Geben Sie in dem gegebenen Verband P folgende Elemente an: (2)

(i) $\sup\{c,d,f\}$

(ii) $\inf\{\sup\{b,e,f\}, \sup\{b,d\}\}$

P:



(c) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Jeder vollständige Verband ist distributiv. (2)

(ii) Jeder distributive Verband ist vollständig. (2)

Hausaufgabe 5.2

(a) Wir betrachten den Verband $(T_{2018}, |)$.

(i) Geben Sie T_{2018} explizit an. (1)

(ii) Wählen Sie eine geeignete Menge A und geben Sie einen Isomorphismus von $(T_{2018}, |)$ nach $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ an. (2)

(iii) Ist $(T_{2018}, |)$ eine Boolesche Algebra? Begründen Sie kurz. (1)

Hinweis: Die Definition für T_n $(n \in \mathbb{N})$ findet sich in Seminaraufgabe 5.3.

(b) Seien $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, \cdot^c, 0, 1)$ und $\mathcal{N} = (N, \sqcup, \sqcap, \cdot^*, \bot, \top)$ endliche Boolesche Algebren und $f\colon A_{\mathcal{M}} \to A_{\mathcal{N}}$ eine bijektive Abbildung von der Menge der Atome $A_{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$ in die Menge der Atome $A_{\mathcal{N}}$ von $\mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass es höchstens einen Isomorphismus $\varphi\colon M \to N$ gibt mit $\varphi(a) = f(a)$ für alle $a \in A_{\mathcal{M}}$. (3)

(c) Geben Sie binäre Funktionen $\oplus$ und $\odot$ an, so dass (3)

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap) \text{ isomorph zu } (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot).$$

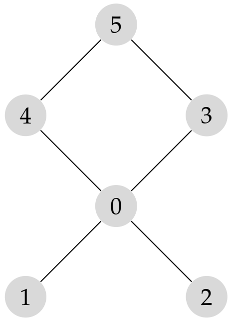
Hinweis: Für Mengen A und B sei

$$B^A = \{f \mid f\colon A \to B \text{ ist Abbildung}\}$$

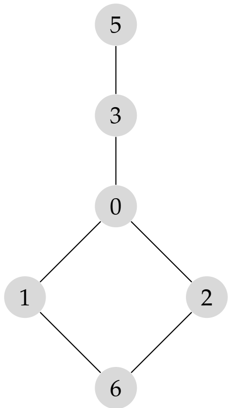
Obwohl $\oplus$ und $\odot$ selbst binäre Funktionen sind, bilden sie Paare von Funktionen auf Funktionen ab.

Seminaraufgabe 5.3 (Verbände)

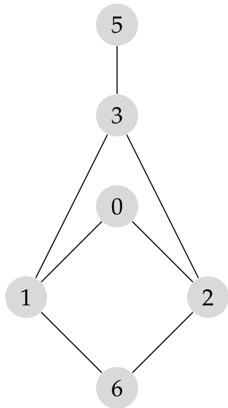
(a) Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Ordnungsrelationen R_1, R_2, R_3 und R_4 (dargestellt als Hasse-Diagramme) um Verbände handelt.



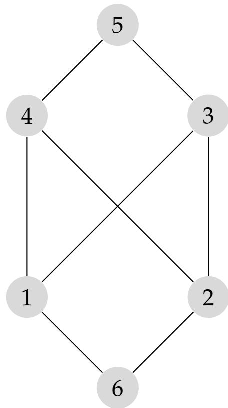
(a) Relation R_1



(b) Relation R_2



(c) Relation R_3



(d) Relation R_4

(b) Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$T_n = \{t \in \mathbb{N} \mid t \mid n\}$$

der natürlichen Teiler von n.

(i) Stellen Sie $(T_{40}, |)$ als Hasse-Diagramm dar.

(ii) Bestimmen Sie die Menge der oberen Schranken von $\{4, 10\}$ und $\sup(4, 10)$.

(iii) Begründen Sie kurz, warum es sich um einen Verband handelt.
Hinweis: Kennen Sie eine andere Bezeichnung für $\sup(a, b)$?

(iv) Entscheiden Sie.

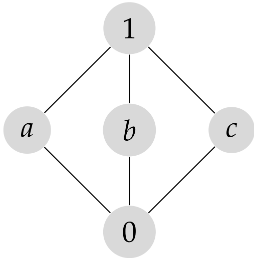
	wahr	falsch
$(T_{40}, \|)$ hat ein größtes Element.		
$(T_{40}, \|)$ ist vollständig geordnet.		
$(T_{40}, \|)$ ist vollständiger Verband.		

(v) Ist auch $(\mathbb{N}, |)$ ein Verband?

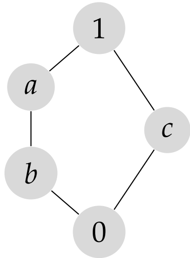
(c) Sei $(L, \vee, \wedge)$ ein Verband. Ein *Unterverband* von $(L, \vee, \wedge)$ ist ein Verband $(L', \vee', \wedge')$ sodass $L' \subseteq L$ und sodass für alle $x, y \in L'$ gilt, dass

$$x \vee' y = x \vee y \qquad \text{und} \qquad x \wedge' y = x \wedge y.$$

Bereits aus der Vorlesung sind außerdem folgende zwei Verbände bekannt:

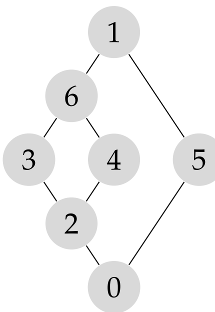


(a) Verband $(M_3, \vee_3, \wedge_3)$

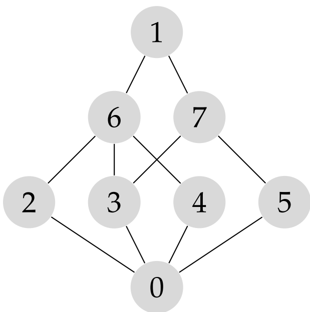


(b) Verband $(N_5, \vee_5, \wedge_5)$

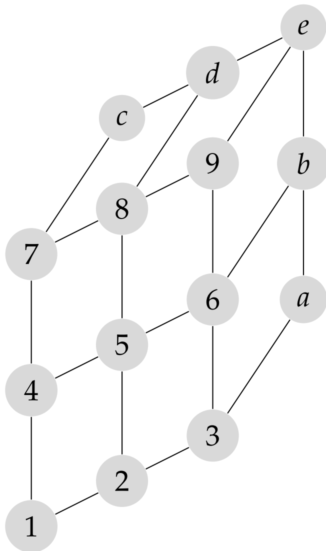
Beweisen Sie, dass die folgenden Verbände nicht distributiv sind.



(a) Verband $(L_0, \vee_0, \wedge_0)$



(b) Verband $(L_1, \vee_1, \wedge_1)$



(c) Verband $(L_2, \vee_2, \wedge_2)$

Seminaraufgabe 5.4 (Boolesche Algebren, Isomorphie)

(a) Geben Sie die Komplemente von $1, 8$ und 20 im Verband $(T_{40}, |)$ an.
Ist der Verband $(T_{40}, |)$ eine Boolesche Algebra?

(b) Wir betrachten den Verband $\mathcal{T} = (T_{42}, |)$.

(i) Stellen Sie $\mathcal{T}$ als Hasse-Diagramm dar.

(ii) Geben Sie eine Darstellung von $\mathcal{T}$ als Struktur des Typs (0,2,0,2) an.

(iii) Geben Sie die Menge $\{a \in T_{42} \mid a \neq 1,\ \forall x(x \mid a \to (x = 1 \vee x = a))\}$ an.

(iv) Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathcal{T}$ in eine Potenzmengenalgebra an.

(v) Finden Sie $x_1, x_2, x_3 \in T_{42} \setminus \{42\}$ mit $x_3 \neq x_4 \neq x_5$ und

$$x_3 \vee x_4 \vee x_5 = 42.$$