Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 4

Hinweise:

- Abgabeschluss der Hausaufgaben: **11.12.2018** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die Hausaufgaben werden in der Hörsaalübung am 17.12. besprochen.

Hausaufgabe 4.1

(a) Seien A, B endlich. Wie viele verschiedene Funktionen von A nach B gibt es? Begründen Sie kurz. (2)

(b) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Formeln, in denen genau die Atome A und B vorkommen. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass die semantische Äquivalenz von Formeln $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}$ ist (**ohne abzugebende Begründung**). Bestimmen Sie nun $|\mathcal{F}/\equiv|$ und **begründen** Sie ihre Antwort. (3)

(c) Beweisen Sie: (5)

$$|\mathbb{N}| \neq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|.$$

Hinweis: Für Mengen A und B sei

$$B^A = \{f \mid f\colon A \to B \text{ ist Abbildung}\}$$

Hausaufgabe 4.2

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Wir bezeichnen mit (a, b) das offene Intervall und mit $[a, b]$ das geschlossene Intervall reeller Zahlen von a bis b.

- (i) Geben Sie eine Injektion von der Menge (a, b) in die Menge $[a, b]$ an. (1)
- (ii) Geben Sie eine Injektion von der Menge $[a, b]$ in die Menge (a, b) an. Beweisen Sie, dass die gewählte Abbildung injektiv ist. (3)
- (iii) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen gilt. Begründen Sie kurz. (2)

$$|(a,b)| < |[a,b]|$$
$$|(a,b)| = |[a,b]|$$
$$|(a,b)| > |[a,b]|$$

(b) Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob die angegebenen Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und geben Sie jeweils die Menge der Fixpunkte an.

- (i) $\mathrm{abs}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto |x|$ (2)
- (ii) $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ (m, n) \mapsto (2^m, 3^n)$ (2)

Seminaraufgabe 4.3 (Kardinalität)

(a) Wir wollen die Anzahl der verschiedenen Zeichenketten der Länge n über einem endlichen Zeichenvorrat A ermitteln. Dazu betrachten wir die Menge A^n mit

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A,\ 1 \leq i \leq n\}$$

als die Menge eben dieser Zeichenketten.

(i) Begründen Sie, weshalb wir eine Zeichenkette als n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und nicht als Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ auffassen sollten.

(ii) Bestimmen Sie $|\{0,1\}^8|$.

(iii) Bestimmen Sie $|A^n|$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie

$$|(0,1]| = |\mathbb{R}^+|.$$

Hinweis: Es sei $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Seminaraufgabe 4.4 (Abbildungen, Fixpunkte, Wohldefiniertheit)

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiert durch

$$X \mapsto \{1,5\} \cup \{n+3 \mid n \in X\}$$

einen Fixpunkt hat. Ist f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(b) (i) Auf der Menge $M = \{-2, -1, 1, 2\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$R = \{(-2,-2), (-1,-1), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}\ .$$

Zeigen Sie, dass auf $M \,/\, R$ durch die Vorschrift

$$[a]_R \mapsto [-a]_R$$

keine Abbildung $f\colon M \,/\, R \to M \,/\, R$ definiert wird.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$\sim_n = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \mid (a-b)\}\ .$$

Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{Z} \,/ \sim_n$ durch die Vorschrift

$$[a]_{\sim_n} \mapsto [-a]_{\sim_n}$$

eine Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \,/ \sim_n \to \mathbb{Z} \,/ \sim_n$ definiert wird.