Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 2

Hinweise:

- Abgabeschluss der Hausaufgaben: **13.11.2018** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die Hausaufgaben werden in der Hörsaalübung am 19.11. besprochen.

Hausaufgabe 2.1

(a) Vereinfachen Sie schrittweise mittels Mengenumformungen:

$$A \cap (A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$$

(b) Stellen Sie die folgenden Mengen als Aufzählung dar.
Beispiel: $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\} \rightsquigarrow M = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k\,(n = 2k)\} \\
M_2 &= \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m\,(m < n)\} \\
M_3 &= \{n \in \mathbb{N} \mid \forall q\,\big(\,(\exists k\,(k \cdot q = n)) \leftrightarrow (q = 1 \lor q = n)\,\big)\} \\
M_4 &= \{n \in \mathbb{N} \mid \forall u\,\big(\,(u + u = u \cdot u \land \exists j\,(j < u)) \to \exists k\,(u \cdot k = n)\,\big)\}
\end{aligned}$$

Hinweis: Die verwendete Schreibweise impliziert $\mathbb{N}$ als Universum für die logischen Ausdrücke.

(c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Hausaufgabe 2.2

(a) Sei $T = \{(m, n) \mid \exists k\, (n = k \cdot m)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass T reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

(b) Wir definieren Relationen $R_0, R_1, R_2, \dots$ sowie $S_0, S_1, S_2, \dots$ auf $\mathbb{N}$ wie folgt. Wir setzen $R_0 := <$ und definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$R_{k+1} := R_k \,;\, R_0 \qquad \text{und} \qquad S_k := R_k \setminus \bigcup_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l > k}} R_l.$$

Geben Sie die folgenden Mengen explizit an.

(i) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k$

(ii) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (S_k \,;\, (S_k^{-1}))$

(c) Wir betrachten je zwei Eigenschaften von Relationen. Geben Sie entweder eine Relation auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ an, die beiden Eigenschaften genügt oder begründen Sie kurz, warum keine solche existiert.

(i) Reflexiv und irreflexiv

(ii) Symmetrisch und antisymmetrisch

(iii) Vollständig und nicht reflexiv

Seminaraufgabe 2.3 (Mengen, Vollständige Induktion)

(a) Entscheiden Sie:

	wahr	falsch
$\{1,2\} \cup \{1\} \subseteq \{2,1\}$		
$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$		
$\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$		
$A \subseteq M \implies \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A^c) = \mathcal{P}(M)$		

(b) Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$V_p := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists t(t \in \mathbb{N} \wedge t \cdot p = n)\} \ .$$

Bestimmen Sie die Menge

$$V_\infty := \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ prim}}} V_p \ .$$

(c) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl n gilt die Ungleichung

$$n^2 - 1 \leq 2^n.$$

Seminaraufgabe 2.4 (Relationen)

(a) Entscheiden Sie, ob R_1 und R_2 die bekannten Eigenschaften erfüllen.

$$R_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\},$$
$$R_2 = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid m - n \text{ ist gerade}\}.$$

(b) (i) Seien R, S zwei Relationen auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

(ii) Sei $T = \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \forall t\big((t \in \mathbb{N} \wedge t \mid m \wedge t \mid n) \to t = 1\big)\big\}$.
Bestimmen Sie $T \ ; T$.
Hinweis: Wir schreiben $t \mid m$ für "t teilt m".

(iii) Sei nun $U = T \cap <$. Bestimmen Sie $U \ ; (U^{-1})$.

(c) Zeigen Sie, dass die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität voneinander unabhängig sind. Geben Sie also drei verschiedene Relationen R_1, R_2, R_3 auf der Menge $M = \{a,b,c\}$ an, so dass

(i) R_1 reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist,

(ii) R_2 reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch ist und

(iii) R_3 symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.