Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 1

Hinweise:

- Abgabeschluss der Hausaufgaben: **30.10.2018** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die Hausaufgaben werden in der Hörsaalübung am 05.11. besprochen.

Äquivalente Umformung		Bezeichnung
$A \wedge B$ $A \vee B$	$B \wedge A$ $B \vee A$	Kommutativität
$A \wedge (B \wedge C)$ $A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C$ $(A \vee B) \vee C$	Assoziativität
$A \wedge (B \vee C)$ $A \vee (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität
$\neg\neg A$	A	Involution
$A \wedge A$ $A \vee A$	A A	Idempotenz
$\neg(A \wedge B)$ $\neg(A \vee B)$	$\neg A \vee \neg B$ $\neg A \wedge \neg B$	De Morgan
$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$	Implikation
$A \wedge (A \vee B)$ $A \vee (A \wedge B)$	A A	Absorption
$A \wedge (B \vee \neg B)$ $A \vee (B \wedge \neg B)$	A A	Neutralität

Hausaufgabe 1.1

(a) Beweisen oder widerlegen Sie mittels einer Wahrheitswertetabelle, dass die Formel

$$F = (A \land \neg(B \to C)) \to B$$

tautologisch ist. Halten Sie sich an das angegebene Schema.

A	B	C	$B \to C$	?	?	F
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) Entscheiden Sie für die vorliegenden Formeln, ob diese tautologisch (T), erfüllbar (E), widerlegbar (W) oder unerfüllbar (U) sind.

Formel	**T**	**E**	**W**	**U**
$A \to (B \to A)$				
$(A \to B) \to A$				

(c) Vereinfachen Sie die folgende Formel mit Hilfe äquivalenter Umformungen. Geben Sie in jedem Schritt die verwendete Regel an.

$$(C \to A) \lor (A \land B) \lor (B \land C)$$

Hinweis: Sie können $F \equiv G$ für semantisch äquivalente Formeln F und G schreiben.

(d) Definieren Sie einen Junktor $\diamond$ für den Ausdruck *weder A noch B* durch Angabe einer Wahrheitswertetabelle. Geben Sie außerdem eine kurze, zu $A \diamond B$ äquivalente Formel an, die ausschließlich bisher bekannte Junktoren enthält.
Beispiel: Mein Fahrrad ist weder rot noch blau.

(e) Wir betrachten die Atome A, B, C, D, E. Wie viele verschiedene Wahrheitswertebelegungen mit $A = 1$ und $C = 0$ gibt es?

Hausaufgabe 1.2

(a) Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen (entsprechend der Vorlesung). Benutzen Sie dabei ausschließlich die Prädikate nachfolger(m, n), teilbar(m, n), prim(n) und $m = n$.

(i) Jede Zahl hat mindestens einen Nachfolger.

(ii) Keine Zahl hat die 0 als Nachfolger.

(iii) Für jede Zahl n gilt: Wenn n prim ist, dann ist $n = 2$ oder n ist ungerade.

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Formeln, so dass der Junktor $\neg$ nur noch direkt vor Prädikaten vorkommt.

(i) $\neg\forall n\,(P(n) \wedge Q(n))$

(ii) $\neg\exists m\forall n\,(P(n) \to R(m, n))$

(c) Beweisen Sie die Aussage (iii) aus Aufgabe (a).

Seminaraufgabe 1.3 (Was sind Aussagen?)

Diskutieren Sie, ob es sich bei folgenden natürlichsprachlichen Sätzen um Aussagen im mathematischen Sinne handelt.

(a) Eine natürliche Zahl n ist stets durch 7 teilbar.

(b) Ich studiere Informatik.

(c) Bitte melden Sie sich beim Zugführer!

(d) Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist π eine rationale Zahl.

(e) Am 31.12.2020 werde ich heiraten.

(f) Mathematik ist schwer.

(g) Es regnet gerade.

(h) Ich lüge gerade.

Seminaraufgabe 1.4 (Aussagenlogik)

(a) Wir betrachten das folgende Kartendeck.

$$\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{7}\,\boxed{8}\,\boxed{9}$$

Mithilfe logischer Formeln können wir nun Kartensets beschreiben. Formalisieren Sie die folgenden Anforderungen an ein Kartenset.

(i) Die Karte 0 ist im Set enthalten.

(ii) Wenn die Karte 4 oder 5 im Set enthalten ist, dann auch die Karte 6.

(iii) Entweder die Karte 3 ist nicht im Set oder die Karte 9 ist im Set enthalten.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Sets den aufgestellten Formeln genügen.

(i) $\boxed{0}\,\boxed{4}\,\boxed{6}\,\boxed{8}$ (ii) $\boxed{0}\,\boxed{5}$ (iii) $\boxed{0}\,\boxed{7}$ (iv) $\boxed{0}\,\boxed{6}\,\boxed{9}$

(b) Zeigen Sie, dass die Formeln F und G semantisch äquivalent sind.

$$F = (A \to B) \land \neg(A \lor \neg C)$$
$$G = \neg A \land C$$

Seminaraufgabe 1.5 (Prädikatenlogik)

(a) Geben Sie prädikatenlogische Formeln an, die den folgenden natürlichsprachlichen Sätzen entsprechen, so dass für alle denkbaren Sachverhalte der Wahrheitswert des natürlichsprachlichen Satzes mit dem der Formel übereinstimmt.

(i) Alle Menschen sind sterblich.

(ii) Es gibt Zwerge, die größer als ein Riese sind.

(b) Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Geben Sie Formeln $T(m, n)$ und $P(n)$ an, so dass

(i) $T(m, n)$ genau dann erfüllt ist, wenn m Teiler von n ist,

(ii) $P(n)$ genau dann erfüllt ist, wenn n prim ist.

(c) Beweisen Sie:

(i) Jede natürliche Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar.

(ii) Für alle natürlichen Zahlen t, m, n gilt:

Wenn t Teiler von m und n ist, so ist t Teiler von $m + n$.