Diskrete Strukturen

Vorlesung 14: Färbbarkeit und Baumbreite

29. Januar 2019

Nächste Termine — Modul “Diskrete Strukturen”

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen (Abgabe 2. Bonushalbserie)
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik
11.2.	12.2.
18.2. Prüfungswoche	19.2. Prüfung am 22.2.

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

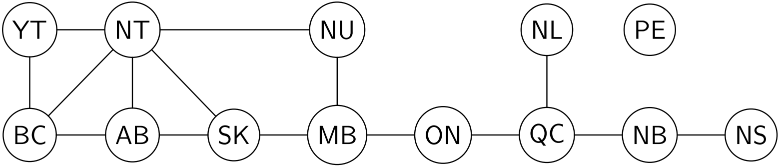
- Charakterisierung Färbbarkeit
- Matchings
- Baumbreite

Bitte Fragen direkt stellen!

Färbbarkeit — Wiederholung

Ungerichteter Graph:

- Länder als Ecken
- Nachbarn verbunden durch Kanten



Färbbarkeit — Wiederholung

Definition (§13.13 Färbbarkeit)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein ungerichteter Graph (E, K) ist *n-färbbar*, falls eine Funktion $c\colon E \to \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ existiert, so dass $c(s) \neq c(z)$ für alle $(s, z) \in K$.

Färbbarkeit — Wiederholung

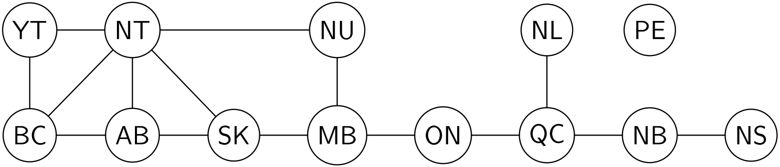
Definition (§13.13 Färbbarkeit)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein ungerichteter Graph (E, K) ist *n-färbbar*, falls eine Funktion $c\colon E \to \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ existiert, so dass $c(s) \neq c(z)$ für alle $(s, z) \in K$.

Notizen:

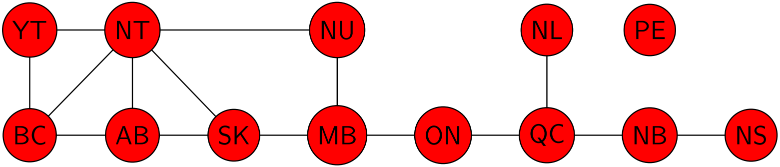
- Für $n \geq 1$ ist $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{1, \dots, n\}$
- Für $n = 0$ ist $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\} = \emptyset$
- n-färbbar falls alle Ecken mit n Farben $\{1, \dots, n\}$ so belegt werden können, dass Nachbarn verschiedene Farben tragen

Färbbarkeit — Wiederholung



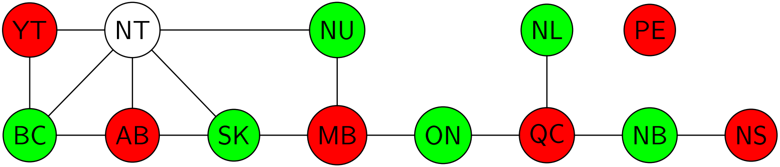
- offensichtlich nicht 0-färbbar

Färbbarkeit — Wiederholung



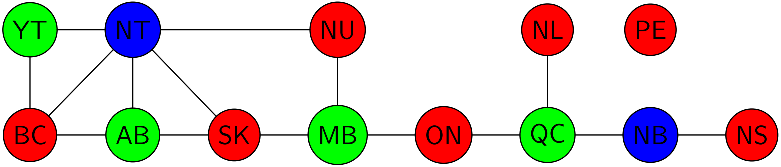
- offensichtlich nicht 0-färbbar
- offensichtlich nicht 1-färbbar

Färbbarkeit — Wiederholung



- offensichtlich nicht 0-färbbar
- offensichtlich nicht 1-färbbar
- offensichtlich nicht 2-färbbar

Färbbarkeit — Wiederholung



- offensichtlich nicht 0-färbbar
- offensichtlich nicht 1-färbbar
- offensichtlich nicht 2-färbbar
- 3-färbbar mit

$$1 = c(\mathrm{BC}) = c(\mathrm{SK}) = c(\mathrm{NU}) = c(\mathrm{ON}) = c(\mathrm{NL}) = c(\mathrm{PE}) = c(\mathrm{NS})$$
$$2 = c(\mathrm{YT}) = c(\mathrm{AB}) = c(\mathrm{MB}) = c(\mathrm{QC})$$
$$3 = c(\mathrm{NT}) = c(\mathrm{NB})$$

§14.1 Theorem

Ein schlingenfreier ungerichteter Graph (E, K)
ohne Kreise ungerader Länge ist 2-färbbar

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 1/2).

- Induktionsanfang: Sei $|K| = 0$. Dann ist (E, K) 1-färbbar und damit 2-färbbar nach §13.16.

§14.1 Theorem

Ein schlingenfreier ungerichteter Graph (E, K)
ohne Kreise ungerader Länge ist 2-färbbar

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 1/2).

- Induktionsanfang: Sei $|K| = 0$. Dann ist (E, K) 1-färbbar und damit 2-färbbar nach §13.16.
- Induktionshypothese: Gelte die Aussage für $|K| = n$.
- Induktionsschritt: Sei $|K| = n + 2$. O.B.d.A. habe (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente (vgl. §13.19) und $(s, z) \in K$ eine beliebige Kante. Da (E, K) schlingenfrei ist, gilt $s \neq z$. Gemäß der Induktionshypothese gilt die Aussage für $\mathcal{G}' = (E, K \setminus \{(s, z), (z, s)\})$. Sei $c : E \to \{1, 2\}$ die notwendige Färbung für $\mathcal{G}'$. Wir unterscheiden drei Fälle.

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 2/2).

- Sei $c(s) \neq c(z)$. Dann ist c offenbar auch eine Färbung für (E, K).

Färbbarkeit — Eigenschaften

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 2/2).

- Sei $c(s) \neq c(z)$. Dann ist c offenbar auch eine Färbung für (E, K).
- Sei $c(s) = c(z)$ und seien die Ecken s und z in der selben starken Zusammenhangskomponente von $\mathcal{G}'$. Dann existiert ein Weg und damit auch ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ minimaler Länge ℓ von s nach z in $\mathcal{G}'$.

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 2/2).

- Sei $c(s) \neq c(z)$. Dann ist c offenbar auch eine Färbung für (E, K).
- Sei $c(s) = c(z)$ und seien die Ecken s und z in der selben starken Zusammenhangskomponente von $\mathcal{G}'$. Dann existiert ein Weg und damit auch ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ minimaler Länge ℓ von s nach z in $\mathcal{G}'$. Da $c(s) = c(z)$ muss ℓ gerade sein. Dann ist jedoch

  $$(\underbrace{e_0}_{s} \to \cdots \to \underbrace{e_\ell}_{z} \to s)$$ ein Kreis in (E, K) ungerader Länge.

  Widerspruch zur Annahme.

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 2/2).

- Sei $c(s) \neq c(z)$. Dann ist c offenbar auch eine Färbung für (E, K).
- Sei $c(s) = c(z)$ und seien die Ecken s und z in der selben starken Zusammenhangskomponente von $\mathcal{G}'$. Dann existiert ein Weg und damit auch ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ minimaler Länge ℓ von s nach z in $\mathcal{G}'$. Da $c(s) = c(z)$ muss ℓ gerade sein. Dann ist jedoch $(\underbrace{e_0}_{s} \to \cdots \to \underbrace{e_\ell}_{z} \to s)$ ein Kreis in (E, K) ungerader Länge.

  Widerspruch zur Annahme.
- Sei $c(s) = c(z)$ und seien die Ecken s und z in verschiedenen starken Zusammenhangskomponenten S und Z. Dann ist $c' : E \to \{1, 2\}$, so dass für alle $e \in E$
$$c'(e) = \begin{cases} c(e) & \text{falls } e \in E \setminus S \\ \frac{2}{c(e)} & \text{sonst} \end{cases}$$
  eine Färbung für $\mathcal{G}'$ und (E, K), da $c'(s) \neq c'(z)$. □

Färbbarkeit — Eigenschaften

Notizen:

- im interessanten Fall liegen s und z in verschiedenen starken Zusammenhangskomponenten und haben die gleiche Färbung (gemäß der Induktionshypothese)
- gemäß §13.19 ist die Färbung von verschiedenen starken Zusammenhangskomponenten unabhängig
- wir invertieren die Färbung einer Komponente und erhalten dann eine gültige Färbung

Färbbarkeit — Eigenschaften

§14.2 Theorem

Ein ungerichteter Graph (E, K) mit einem Kreis ungerader Länge ist nicht 2-färbbar

Beweis (indirekt).

Sei $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ ein Kreis ungerader Länge und $c \colon E \to \{1, 2\}$ eine Färbung. O.B.d.A. sei $c(e_0) = 1$ und damit

$$c(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ gerade ist} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

§14.2 Theorem

Ein ungerichteter Graph (E, K) mit einem Kreis ungerader Länge ist nicht 2-färbbar

Beweis (indirekt).

Sei $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ ein Kreis ungerader Länge und $c\colon E \to \{1, 2\}$ eine Färbung. O.B.d.A. sei $c(e_0) = 1$ und damit

$$c(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ gerade ist} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $c(e_0) \neq c(e_\ell)$, obwohl $e_0 = e_\ell$. Widerspruch. $\square$

Färbbarkeit — Eigenschaften

§14.3 Korollar

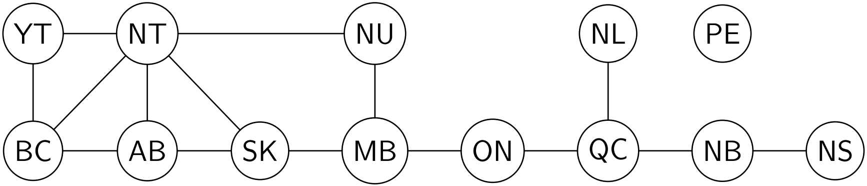
Ein schlingenfreier ungerichteter Graph (E, K) ist 2-färbbar genau dann, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält

Beweis (beidseitige Implikationen).

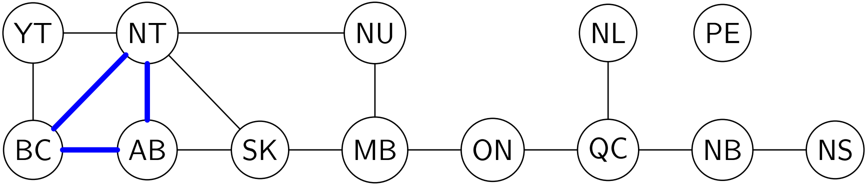
$(\leftarrow)$ Gemäß Theorem §14.1

$(\rightarrow)$ Kontraposition von Theorem §14.2 $\square$

Färbbarkeit — Eigenschaften



Färbbarkeit — Eigenschaften



- nicht 2-färbbar,
  da Kreis (BC $\rightarrow$ AB $\rightarrow$ NT $\rightarrow$ BC) der Länge 3 vorhanden

§14.4 Theorem (Vierfarbensatz; Appel & Haken, 1976–1989)

Jeder schlingenfreie planare Graph ist 4-färbbar

§14.4 Theorem (Vierfarbensatz; Appel & Haken, 1976–1989)

Jeder schlingenfreie planare Graph ist 4-färbbar

Notizen:

- Problem seit 1840 bekannt
- mehrere falsche “Beweise” (Kempe, 1879) und (Tait, 1880), die jeweils erst nach 10 Jahren entwertet wurden
- erster ernster computergestützter Beweis
  (400 Seiten von Unausweichlichkeit bestimmter Konfigurationen
  plus 1.936 reduzierbare Konfigurationen,
  die in über 1.000 Stunden per Computer verifiziert wurden)

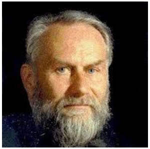
Färbbarkeit — Eigenschaften

Kenneth Ira Appel (* 1932; † 2013)

- amer. Mathematiker
- Vorreiter computergestützter Beweise
- Fulkerson-Preisgewinner 1979

Wolfgang Haken (* 1928)

- dtsch. Mathematiker
- wechselte 1962 an die University of Illinois
- Fulkerson-Preisgewinner 1979



Matching — Definition

Motivation:

- Zuordnung von Ecken des Typs 1 zu Ecken des Typs 2
  (in einem bipartiten Graph)
- z.B. Prozesse zu Prozessoren
- z.B. Fahrer zu Fahrtaufträgen

§14.5 Definition (Matching)

Ein Matching eines bipartiten Graphs (E, K) ist ein ungerichteter Teilgraph $\mathcal{G}' = (E, K')$, so dass $\mathrm{grad}_{\mathcal{G}'}(e) \leq 1$ in $\mathcal{G}'$ für alle $e \in E$.
Das Matching $\mathcal{G}'$ ist perfekt, falls $\mathrm{grad}_{\mathcal{G}'}(e) = 1$ für alle $e \in E$.

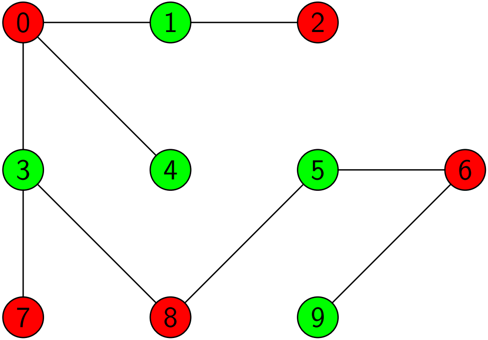
§14.5 Definition (Matching)

Ein Matching eines bipartiten Graphs (E, K) ist ein ungerichteter Teilgraph $\mathcal{G}' = (E, K')$, so dass $\mathrm{grad}_{\mathcal{G}'}(e) \leq 1$ in $\mathcal{G}'$ für alle $e \in E$.
Das Matching $\mathcal{G}'$ ist perfekt, falls $\mathrm{grad}_{\mathcal{G}'}(e) = 1$ für alle $e \in E$.

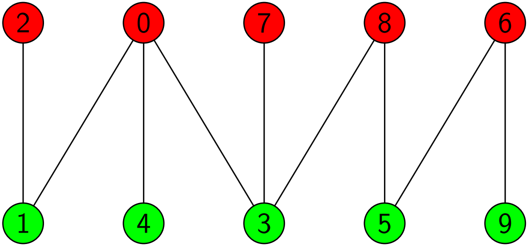
Notizen:

- Auswahl der Kanten, so dass keine Ecke Startecke mehrerer Kanten ist
- in einem imperfekten Matching können Ecken
  an keiner Kante teilnehmen
- in einem perfekten Matching gilt offenbar $\{s \mid (s, z) \in K'\} = E$

Matching — Definition



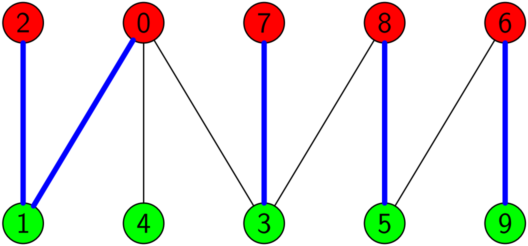
Matching — Definition



Notizen:

- Standardanordnung für bipartite Graphen

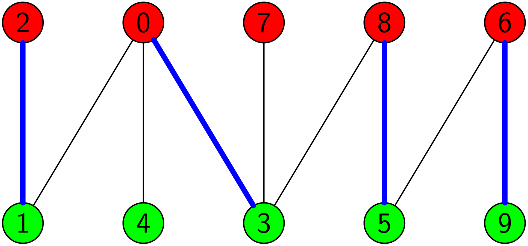
Matching — Definition



Notizen:

- Standardanordnung für bipartite Graphen
- kein Matching (E, K'), da $(1, 2) \in K'$ und $(1, 0) \in K'$

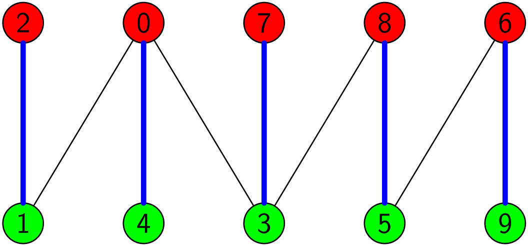
Matching — Definition



Notizen:

- Standardanordnung für bipartite Graphen
- kein Matching (E, K'), da $(1, 2) \in K'$ und $(1, 0) \in K'$
- Matching (E, K'), aber nicht perfekt, da $(7, x) \notin K'$ für alle $x \in \{1, 3, 4, 5, 9\}$

Matching — Definition



Notizen:

- Standardanordnung für bipartite Graphen
- kein Matching (E, K'), da $(1, 2) \in K'$ und $(1, 0) \in K'$
- Matching (E, K'), aber nicht perfekt, da $(7, x) \notin K'$ für alle $x \in \{1, 3, 4, 5, 9\}$
- perfektes Matching

Matching — Heiratssatz

§14.6 Theorem (Heiratssatz; Hall, 1935)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher bipartiter Graph mit Färbung $c\colon E \to \{1, 2\}$ und sei $A = \{e \in E \mid c(e) = 1\} = c^{-1}(\{1\})$ die Menge der Ecken mit Farbe 1. Es existiert genau dann ein Matching (E, M) der Kardinalität $|M| = 2 \cdot |A|$, wenn

$$|N_{\mathcal{G}}(X)| \geq |X|$$

für alle $X \subseteq A$, wobei $N_{\mathcal{G}}(X) = \bigcup_{e \in X} N_{\mathcal{G}}(e)$.

Beweis (beidseitige Implikationen; 1/3).

$(\to)$ Sei (E, M) ein Matching der Kardinalität $|M| = 2 \cdot |A|$. Also hat jedes Element aus A genau einen Partner im Matching (E, M). In dem Teilgraph $\mathcal{G}' = (E, M)$ gilt daher $|N_{\mathcal{G}'}(X)| = |X|$ für jede Teilmenge $X \subseteq A$. Da $M \subseteq K$ gilt also $|N_{\mathcal{G}}(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$ in (E, K).

Matching — Heiratssatz

Sei $\Gamma(M) = \{s \mid (s, z) \in M\}$

Beweis (beidseitige Implikationen; 2/3).

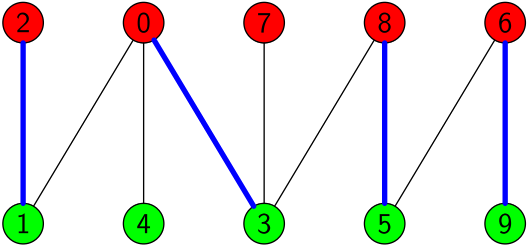
($\leftarrow$) Wir beweisen dies per Widerspruch. Sei $|N_{\mathcal{G}}(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$, aber es existiere kein Matching (E, M) der Kardinalität $|M| = 2 \cdot |A|$. Da (E, K) bipartit ist, existiert eine Kante $(s, z) \in K$. Offenbar ist $M' = \{(s, z), (z, s)\}$ ein Matching. Sei (E, M) ein kardinalitätsmaximales Matching (d.h. $|M|$ ist maximal). Gemäß Annahme gilt also $|M| < 2 \cdot |A|$.

Sei $\Gamma(M) = \{s \mid (s,z) \in M\}$

Beweis (beidseitige Implikationen; 2/3).

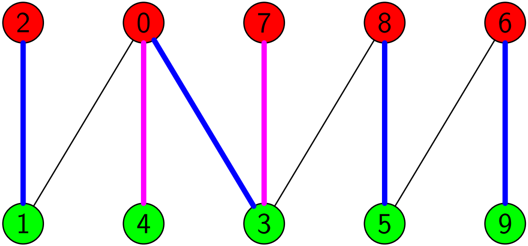
($\leftarrow$) Wir beweisen dies per Widerspruch. Sei $|N_{\mathcal{G}}(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$, aber es existiere kein Matching (E, M) der Kardinalität $|M| = 2 \cdot |A|$. Da (E, K) bipartit ist, existiert eine Kante $(s, z) \in K$. Offenbar ist $M' = \{(s,z),(z,s)\}$ ein Matching. Sei (E, M) ein kardinalitätsmaximales Matching (d.h. $|M|$ ist maximal). Gemäß Annahme gilt also $|M| < 2 \cdot |A|$. Damit existiert eine Ecke $a \in A$, so dass $a \notin \Gamma(M)$. Betrachte alle Pfade, die alternierend Kanten aus $K \setminus M$ und M ausgehend von a nutzen. Seien $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B = E \setminus A$ die Mengen der Ecken, die von diesen Pfaden erreicht werden. Ein solcher maximaler Pfad kann nicht in einer Ecke aus B enden, denn sonst können wir das Matching (E, M) erweitern, indem wir die Kanten dieses Pfades bzgl. deren Mitgliedschaft in M invertieren.

Sei dies das kardinalitätsmaximale Matching (E, M):



Dann ist $7 \notin \Gamma(M)$.

Sei dies das kardinalitätsmaximale Matching (E, M):

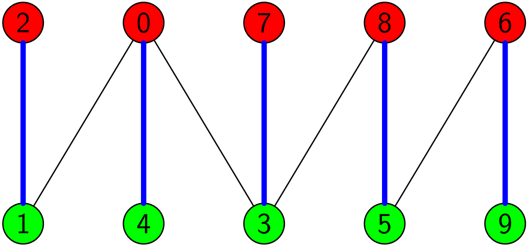


Dann ist $7 \notin \Gamma(M)$.

- Wir betrachten zunächst den maximalen alternierenden Pfad $(7 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 4)$.

Matching — Heiratssatz

Sei dies das kardinalitätsmaximale Matching (E, M):

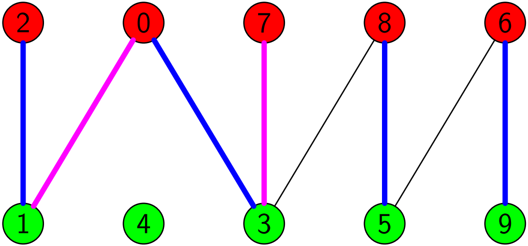


Dann ist $7 \notin \Gamma(M)$.

- Wir betrachten zunächst den maximalen alternierenden Pfad $(7 \to 3 \to 0 \to 4)$.
  Dann enthält das obige Matching mehr Kanten.

Matching — Heiratssatz

Sei dies das kardinalitätsmaximale Matching (E, M):



Dann ist $7 \notin \Gamma(M)$.

- Wir betrachten zunächst den maximalen alternierenden Pfad $(7 \to 3 \to 0 \to 4)$.
  Dann enthält das obige Matching mehr Kanten.
- Also enden alle maximalen alternierenden Pfade in A wie z.B. der Pfad $(7 \to 3 \to 0 \to 1 \to 2)$

Beweis (beidseitige Implikationen; 3/3).

($\leftarrow$) Also endet jeder solche maximale Pfad in einer Ecke aus A. Damit hat jede Ecke aus B' einen Partner in $A' \setminus \{a\}$ in (E, M) und umgekehrt. Also existiert eine Bijektion zwischen $A' \setminus \{a\}$ und B' und $|A'| = |B'| + 1$.

Beweis (beidseitige Implikationen; 3/3).

$(\leftarrow)$ Also endet jeder solche maximale Pfad in einer Ecke aus A. Damit hat jede Ecke aus B' einen Partner in $A' \setminus \{a\}$ in (E, M) und umgekehrt. Also existiert eine Bijektion zwischen $A' \setminus \{a\}$ und B' und $|A'| = |B'| + 1$. Weiterhin $N_{\mathcal{G}}(A') \subseteq B'$, denn für eine Ecke $a' \in A'$ und $(a', b') \in K$ können nur zwei Fälle eintreten:

Beweis (beidseitige Implikationen; 3/3).

($\leftarrow$) Also endet jeder solche maximale Pfad in einer Ecke aus A. Damit hat jede Ecke aus B' einen Partner in $A' \setminus \{a\}$ in (E, M) und umgekehrt. Also existiert eine Bijektion zwischen $A' \setminus \{a\}$ und B' und $|A'| = |B'| + 1$. Weiterhin $N_{\mathcal{G}}(A') \subseteq B'$, denn für eine Ecke $a' \in A'$ und $(a', b') \in K$ können nur zwei Fälle eintreten:

- Falls $(a', b') \in M$, dann ist $b' \in B'$, denn ein alternierender Pfad kann a' nur via b' erreichen.

Beweis (beidseitige Implikationen; 3/3).

$(\leftarrow)$ Also endet jeder solche maximale Pfad in einer Ecke aus A. Damit hat jede Ecke aus B' einen Partner in $A' \setminus \{a\}$ in (E, M) und umgekehrt. Also existiert eine Bijektion zwischen $A' \setminus \{a\}$ und B' und $|A'| = |B'| + 1$. Weiterhin $N_{\mathcal{G}}(A') \subseteq B'$, denn für eine Ecke $a' \in A'$ und $(a', b') \in K$ können nur zwei Fälle eintreten:

- Falls $(a', b') \in M$, dann ist $b' \in B'$, denn ein alternierender Pfad kann a' nur via b' erreichen.
- Falls $(a', b') \notin M$, dann beweisen wir $b' \in B'$ per Widerspruch. Sei also $b' \notin B'$. Da $a' \in A'$ existiert ein alternierender Pfad (π) von a nach a' und da $b' \notin B'$ liegt b' nicht auf diesem Pfad. Dann ist $(\pi \to b')$ ein alternierender Pfad von a nach b' und damit $b' \in B'$. Widerspruch.

Beweis (beidseitige Implikationen; 3/3).

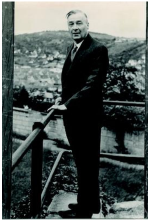
($\leftarrow$) Also endet jeder solche maximale Pfad in einer Ecke aus A. Damit hat jede Ecke aus B' einen Partner in $A' \setminus \{a\}$ in (E, M) und umgekehrt. Also existiert eine Bijektion zwischen $A' \setminus \{a\}$ und B' und $|A'| = |B'| + 1$. Weiterhin $N_{\mathcal{G}}(A') \subseteq B'$, denn für eine Ecke $a' \in A'$ und $(a', b') \in K$ können nur zwei Fälle eintreten:

- Falls $(a', b') \in M$, dann ist $b' \in B'$, denn ein alternierender Pfad kann a' nur via b' erreichen.
- Falls $(a', b') \notin M$, dann beweisen wir $b' \in B'$ per Widerspruch. Sei also $b' \notin B'$. Da $a' \in A'$ existiert ein alternierender Pfad (π) von a nach a' und da $b' \notin B'$ liegt b' nicht auf diesem Pfad. Dann ist $(\pi \to b')$ ein alternierender Pfad von a nach b' und damit $b' \in B'$. Widerspruch.

Also $|N_{\mathcal{G}}(A')| \leq |B'| = |A'| - 1$ im Widerspruch zur Annahme $|N_{\mathcal{G}}(A')| \geq |A'|$. □

Philip Hall (* 1904; † 1982)

- engl. Mathematiker
- Gruppentheoretiker
- Präsident der London Mathematical Society



© Forschungsinstitut Oberwolfach

§14.7 Korollar

Wir teilen die 52 Pokerspielkarten (Ass, 2, . . . , 10, Bube, Dame, König in je 4 Farben) beliebig in 13 Stapel zu je 4 Karten auf. Dann können wir aus jedem Stapel eine Karte so auswählen, dass wir in den 13 ausgewählten Karten eine Karte jeden Kartenwerts haben.

§14.7 Korollar

Wir teilen die 52 Pokerspielkarten (Ass, 2, . . . , 10, Bube, Dame, König in je 4 Farben) beliebig in 13 Stapel zu je 4 Karten auf. Dann können wir aus jedem Stapel eine Karte so auswählen, dass wir in den 13 ausgewählten Karten eine Karte jeden Kartenwerts haben.

Beweis (direkt).

Wir betrachten die 13 Stapel S und die 13 Kartenwerte W und betrachten den bipartiten Graphen $\mathcal{G} = (S \cup W, K)$ mit

$$K = \{(s, w), (w, s) \mid \text{Stapel } s \text{ enthält Wert } w\}$$

§14.7 Korollar

Wir teilen die 52 Pokerspielkarten (Ass, 2, ..., 10, Bube, Dame, König in je 4 Farben) beliebig in 13 Stapel zu je 4 Karten auf. Dann können wir aus jedem Stapel eine Karte so auswählen, dass wir in den 13 ausgewählten Karten eine Karte jeden Kartenwerts haben.

Beweis (direkt).

Wir betrachten die 13 Stapel S und die 13 Kartenwerte W und betrachten den bipartiten Graphen $\mathcal{G} = (S \cup W, K)$ mit

$$K = \{(s, w), (w, s) \mid \text{Stapel } s \text{ enthält Wert } w\}$$

Sei $X \subseteq W$ mit $|X| = k$. Per Widerspruch nehmen wir an, dass $|N_{\mathcal{G}}(X)| < k$; d.h. höchstens $k - 1$ Kartenstapel enthalten alle Kartenwerte aus X. Dies ist offenbar unmöglich, da es $4 \cdot k$ Karten mit Kartenwerten aus X gibt, aber die höchstens $k - 1$ Kartenstapel höchstens $4 \cdot (k - 1)$ Karten enthalten.

§14.7 Korollar

Wir teilen die 52 Pokerspielkarten (Ass, 2, ..., 10, Bube, Dame, König in je 4 Farben) beliebig in 13 Stapel zu je 4 Karten auf. Dann können wir aus jedem Stapel eine Karte so auswählen, dass wir in den 13 ausgewählten Karten eine Karte jeden Kartenwerts haben.

Beweis (direkt).

Wir betrachten die 13 Stapel S und die 13 Kartenwerte W und betrachten den bipartiten Graphen $\mathcal{G} = (S \cup W, K)$ mit

$$K = \{(s, w), (w, s) \mid \text{Stapel } s \text{ enthält Wert } w\}$$

Sei $X \subseteq W$ mit $|X| = k$. Per Widerspruch nehmen wir an, dass $|N_{\mathcal{G}}(X)| < k$; d.h. höchstens $k - 1$ Kartenstapel enthalten alle Kartenwerte aus X. Dies ist offenbar unmöglich, da es $4 \cdot k$ Karten mit Kartenwerten aus X gibt, aber die höchstens $k - 1$ Kartenstapel höchstens $4 \cdot (k - 1)$ Karten enthalten. Also gilt $|N_{\mathcal{G}}(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq W$ und damit die Aussage, da ein perfektes Matching nach §14.6 existiert. $\square$

Matching — Heiratssatz

bipartiter Graph:

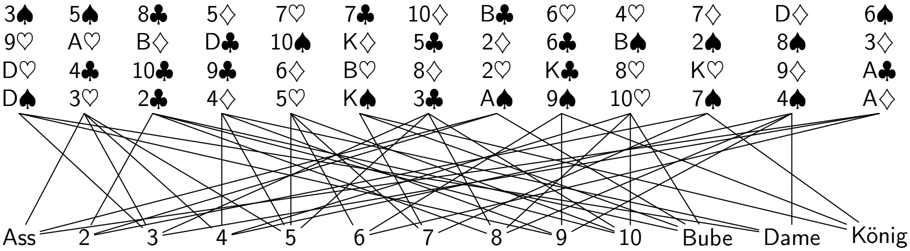
3♠	5♠	8♣	5♢	7♡	7♣	10♢	B♣	6♡	4♡	7♢	D♢	6♠
9♡	A♡	B♢	D♣	10♠	K♢	5♣	2♢	6♣	B♠	2♠	8♠	3♢
D♡	4♣	10♣	9♣	6♢	B♡	8♢	2♡	K♣	8♡	K♡	9♢	A♣
D♠	3♡	2♣	4♢	5♡	K♠	3♣	A♠	9♠	10♡	7♠	4♠	A♢

Ass	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Bube	Dame	König

- nur Ecken

Matching — Heiratssatz

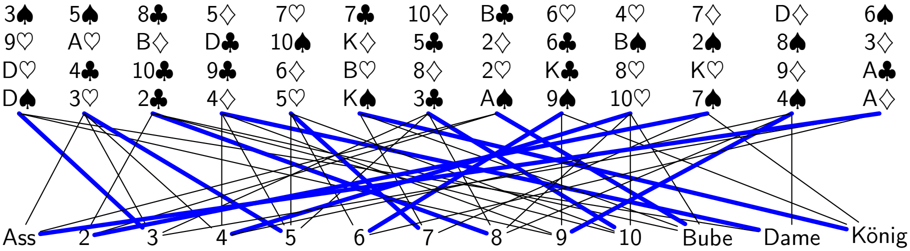
bipartiter Graph:



- nur Ecken
- Ecken und Kanten

Matching — Heiratssatz

bipartiter Graph:



- nur Ecken
- Ecken und Kanten
- mit perfektem Matching

Baumbreite — Motivation

Baumbreite:

- Kenngröße eines ungerichteten Graphen
  (je größer, desto besser vernetzt [oder baumabweichend] ist der Graph)
- erlaubt Zerlegung eines Graphen in Bäume
  (dies liefert oft algorithmische Vorteile)
- wir betrachten nur die Charakterisierung vermittels Räuber-und-Gendarm-Spiel

Baumbreite — Spiel

Räuber-und-Gendarm-Spiel:

- 1 Räuber (rot) vs. k Gendarme (blau)
- rundenweise gespielt auf einem ungerichteten Graphen
- Räuber belegt jederzeit eine Ecke
  Gendarm belegt eine Ecke oder ist im Hubschrauber
- Räuber verliert, falls ein Gendarm seine Ecke erreicht

Baumbreite — Spiel

Räuber-und-Gendarm-Spiel:

- 1 Räuber (rot) vs. k Gendarme (blau)
- rundenweise gespielt auf einem ungerichteten Graphen
- Räuber belegt jederzeit eine Ecke
  Gendarm belegt eine Ecke oder ist im Hubschrauber
- Räuber verliert, falls ein Gendarm seine Ecke erreicht

Zug des Räubers:

- Bewegung beliebig weit entlang der Kanten
- darf keine Gendarm-belegten Ecken passieren

Zug des Gendarms:

Baumbreite — Spiel

Räuber-und-Gendarm-Spiel:

- 1 Räuber (rot) vs. k Gendarme (blau)
- rundenweise gespielt auf einem ungerichteten Graphen
- Räuber belegt jederzeit eine Ecke
  Gendarm belegt eine Ecke oder ist im Hubschrauber
- Räuber verliert, falls ein Gendarm seine Ecke erreicht

Zug des Räubers:

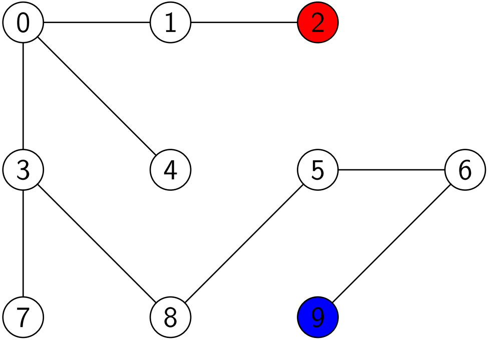
- Bewegung <u>beliebig weit</u> entlang der Kanten
- darf keine Gendarm-belegten Ecken passieren

Zug des Gendarms:

- Einsteigen in Hubschrauber und Ankündigung <u>beliebiger</u> Zielecke, falls bisher auf Ecke (Startecke danach frei)
- auf Ecke verweilen
- Aussteigen aus Hubschrauber auf Zielecke (belegt diese Ecke)

Baumbreite — Spiel

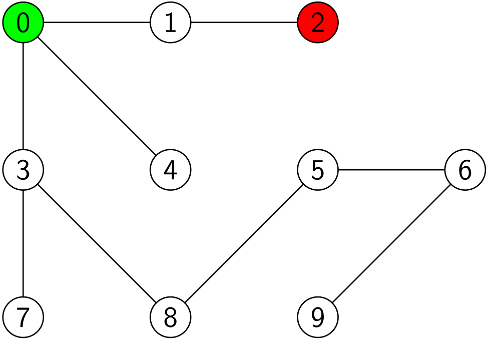
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0

Baumbreite — Spiel

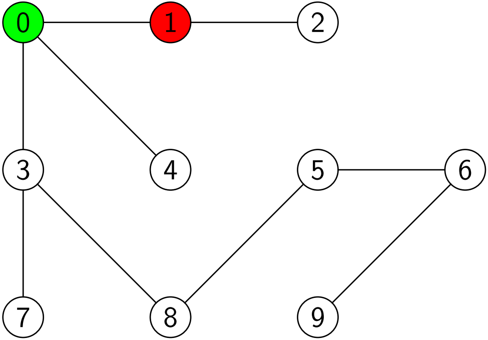
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)

Baumbreite — Spiel

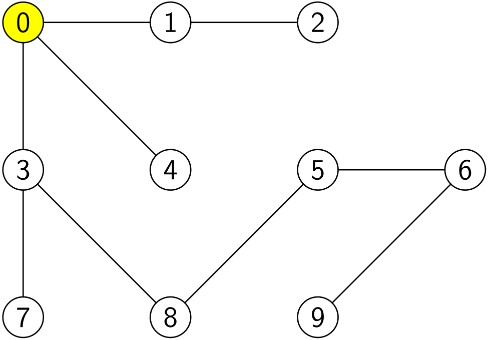
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)

Baumbreite — Spiel

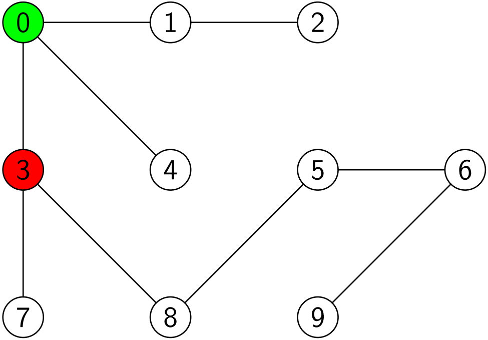
blau = Gendarm　　rot = Räuber　　grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)

Baumbreite — Spiel

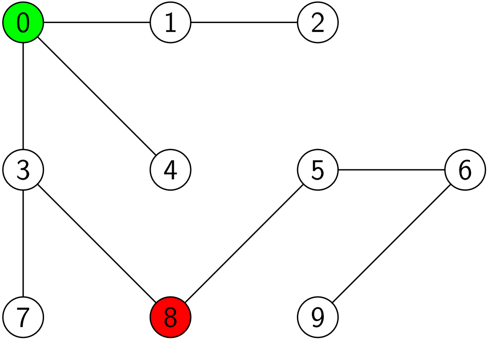
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)

Baumbreite — Spiel

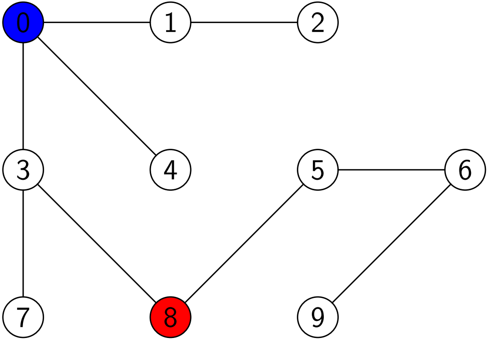
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)

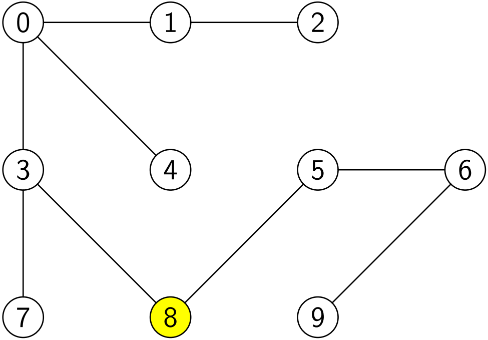
Baumbreite — Spiel

blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



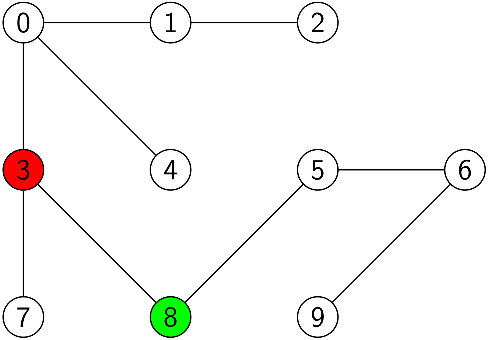
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 8

blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 8
Zug Räuber: Bewegung zu 0 (und Ausstieg Gendarm)

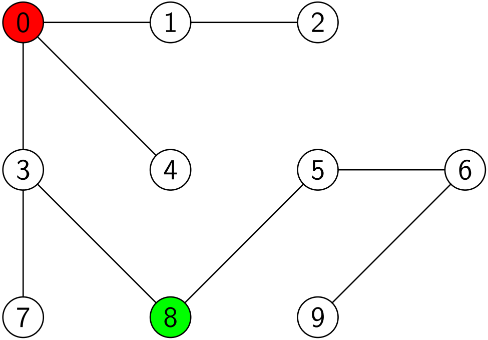
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 8
Zug Räuber: Bewegung zu 0 (und Ausstieg Gendarm)

Baumbreite — Spiel

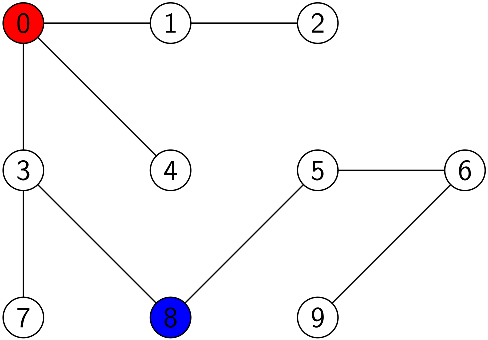
blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 8
Zug Räuber: Bewegung zu 0 (und Ausstieg Gendarm)

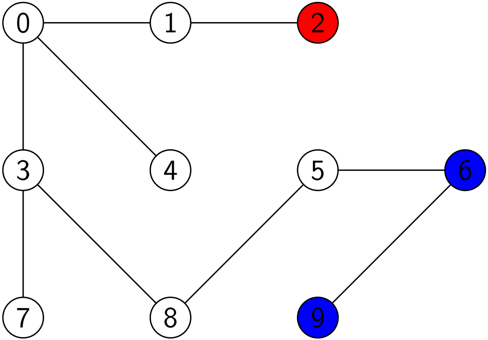
Baumbreite — Spiel

blau = Gendarm rot = Räuber grün = Ankündigung



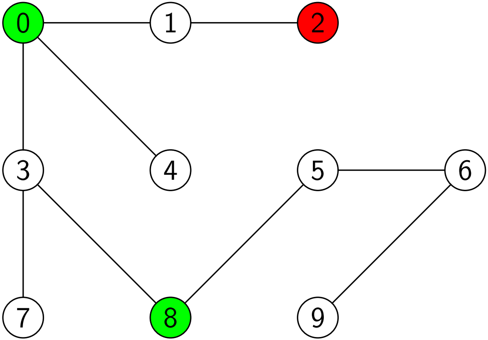
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 0
Zug Räuber: Bewegung zu 8 (und Ausstieg Gendarm)
Zug Gendarm: Einstieg und Ankündigung 8
Zug Räuber: Bewegung zu 0 (und Ausstieg Gendarm)

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation



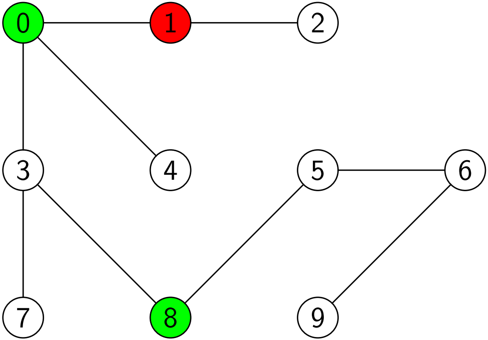
Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

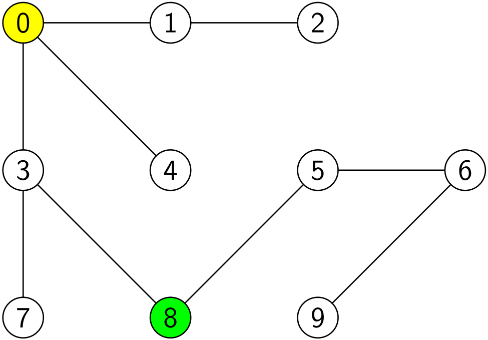


Baumbreite — Spiel

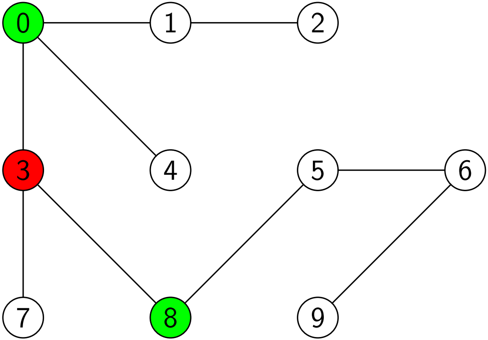
2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation



2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

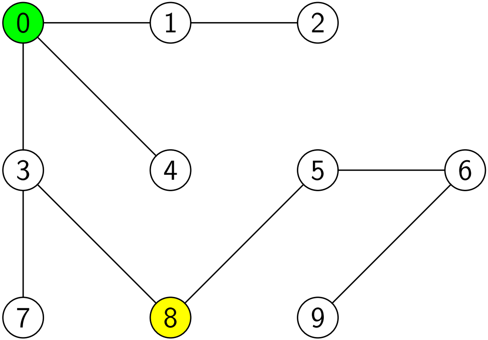


2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

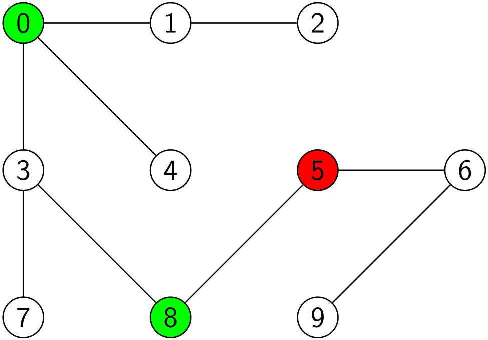


Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

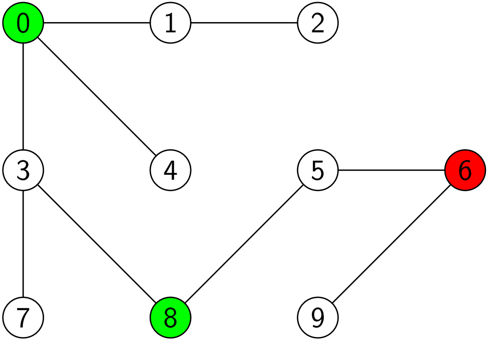


2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

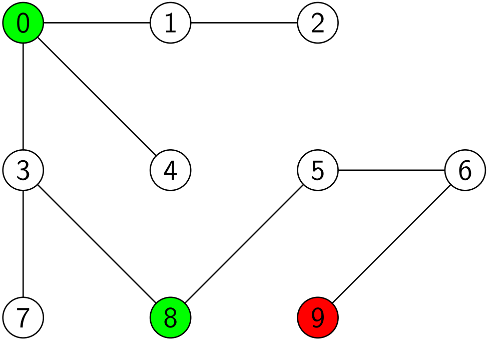


Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

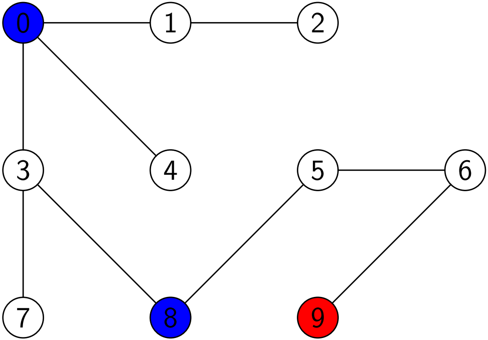


2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation



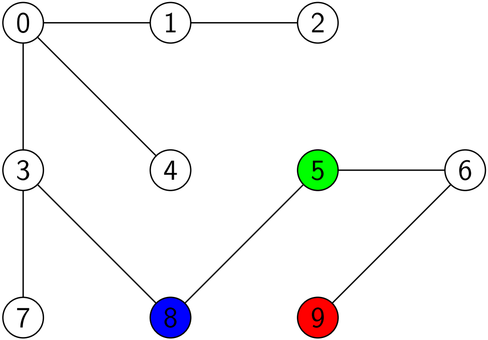
Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

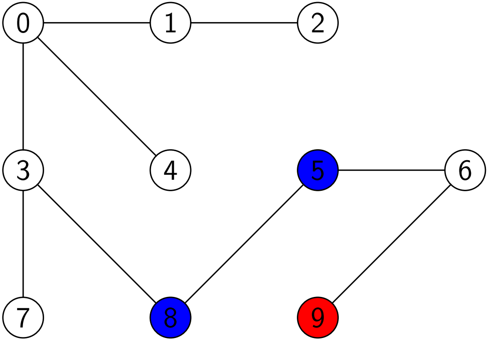


Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

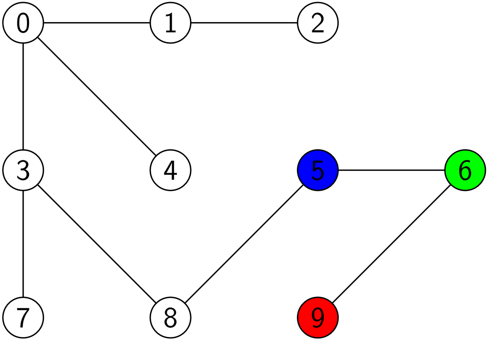


2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation



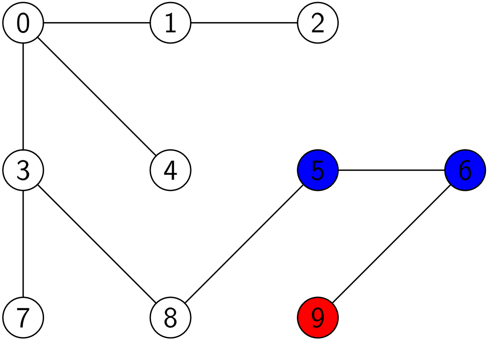
Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation

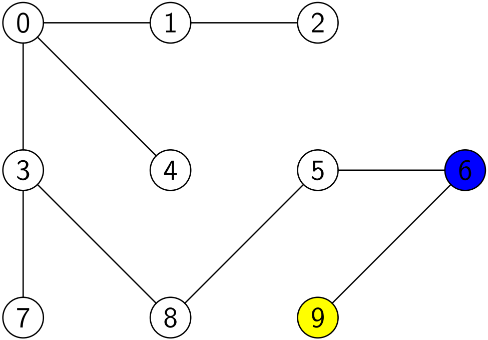


Baumbreite — Spiel

2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation



2 Gendarmen reichen für jede Ausgangssituation



Baumbreite — Definition

Gewinnstrategie:

- Strategie für die Gendarme, die unabhängig von der Ausgangssituation zwingend (d.h. unabhängig von den Zügen des Räubers) zum Sieg der Gendarme führt
- optimales Gegenspiel des Räubers kann Verlust nur hinauszögern

Baumbreite — Definition

Gewinnstrategie:

- Strategie für die Gendarme, die unabhängig von der Ausgangssituation zwingend (d.h. unabhängig von den Zügen des Räubers) zum Sieg der Gendarme führt
- optimales Gegenspiel des Räubers kann Verlust nur hinauszögern

§14.8 Definition (Baumbreite)

Für einen endlichen ungerichteten Graph $G = (E, V)$ ist die **Baumbreite** $k - 1$, falls k die minimale Anzahl von Gendarmen ist, so dass die Gendarme eine Gewinnstrategie auf dem Graph G haben.

Baumbreite — Eigenschaften

Baumbreite:

- entspr. der maximalen Anzahl an Gendarmen, denen der Räuber u.U. noch entkommen kann
- Baumbreite höchstens $|E|$ für jeden Graph (E, K)

Baumbreite — Eigenschaften

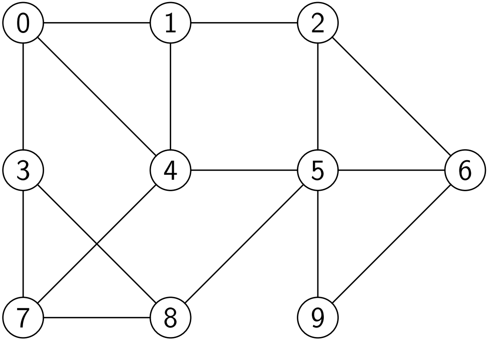
Baumbreite:

- entspr. der maximalen Anzahl an Gendarmen, denen der Räuber u.U. noch entkommen kann
- Baumbreite höchstens $|E|$ für jeden Graph (E, K)

§14.9 Theorem

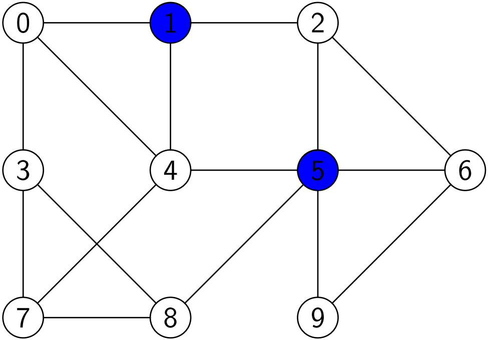
Jeder Baum hat Baumbreite höchstens 1

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

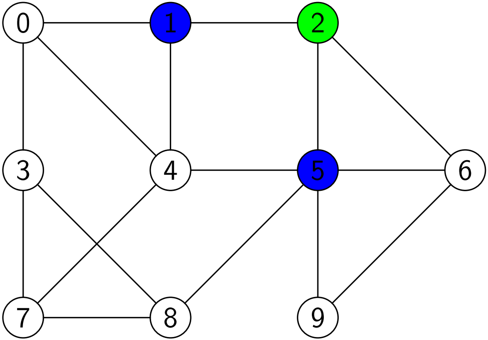


Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

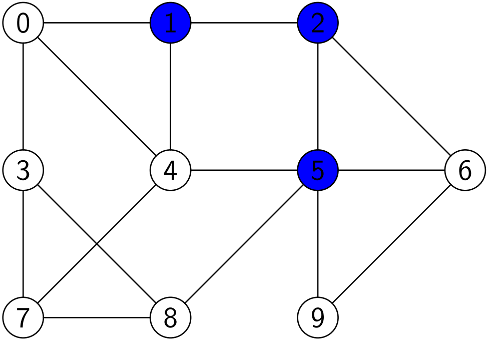


? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



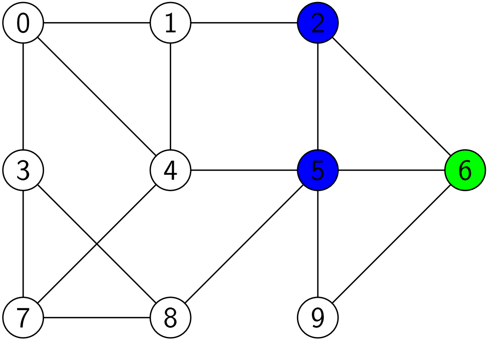
Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

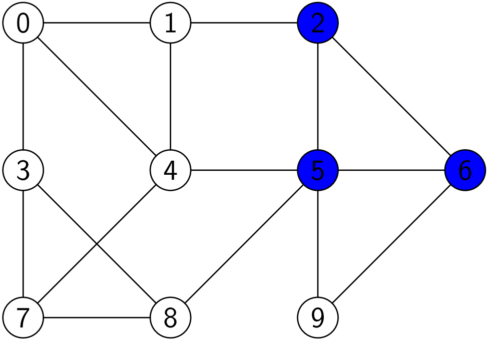


Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

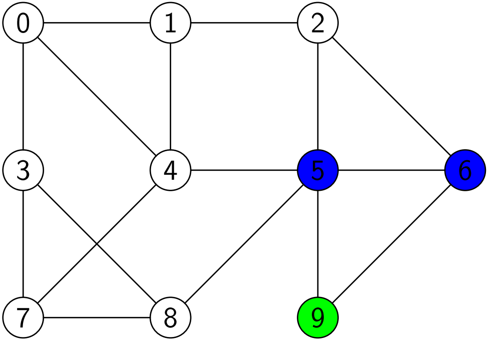


? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



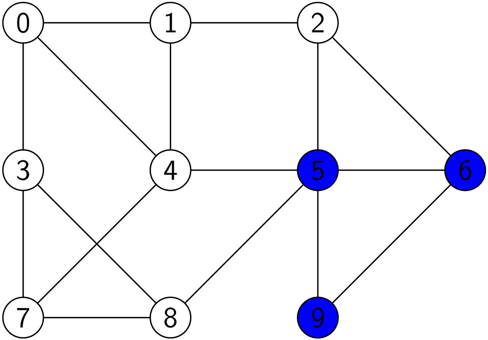
Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



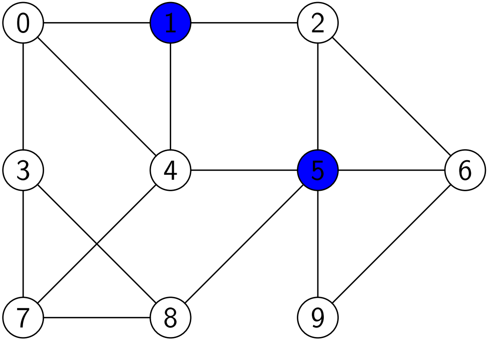
Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



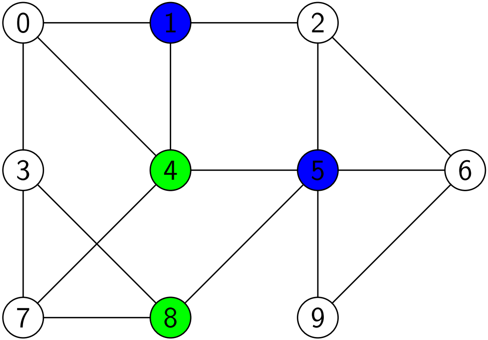
Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

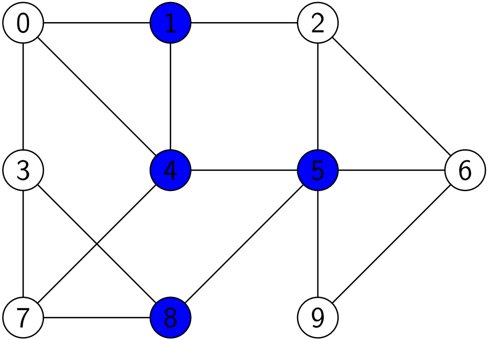


Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

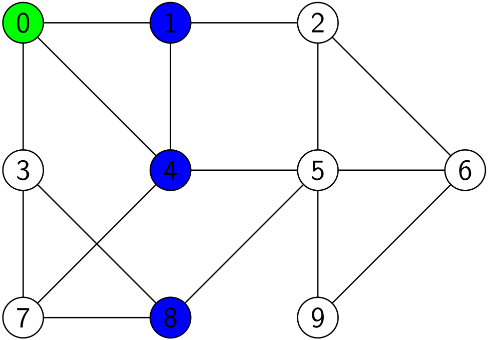


? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



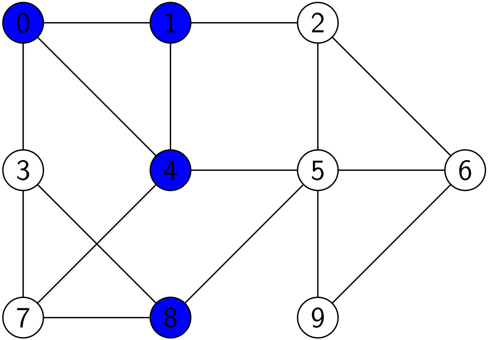
Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

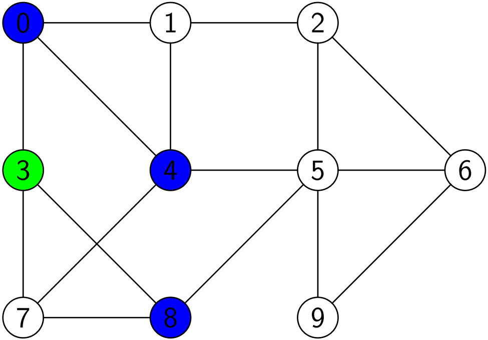


Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

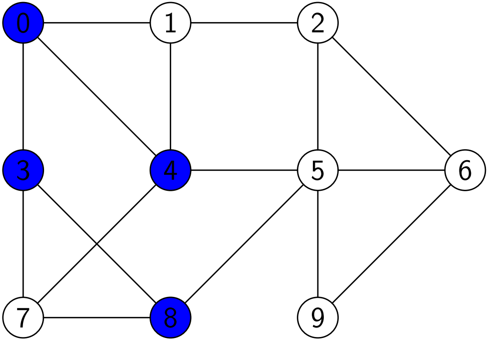


? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



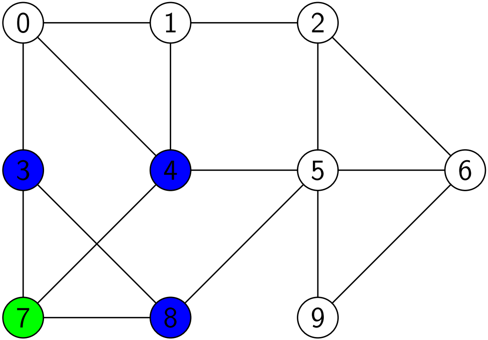
Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation

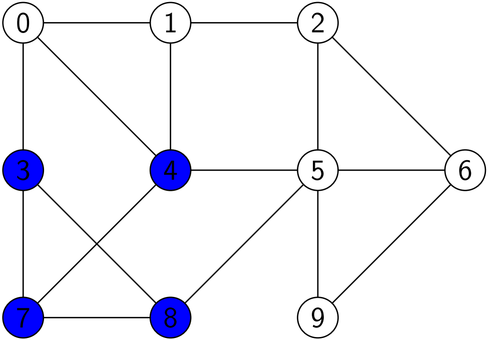


Baumbreite — Eigenschaften

? Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



4 Gendarme reichen für jede Ausgangssituation



Zusammenfassung

- Charakterisierung der 2-färbbaren Graphen
- 4-Farbensatz (planar $\rightarrow$ 4-färbbar)
- Matchings und Heiratssatz
- Baumbreite

Vielen herzlichen Dank für die Evaluation!