Diskrete Strukturen

Vorlesung 12: Graphen — Grundlagen

15. Januar 2019

Evaluation

- bitte Vorlesungs- und Übungsbogen ausfüllen
- Extrabogen für Hörsaalübung
- Abgabe bitte im Hefter der eigenen Übungsgruppe

Nächste Termine — Modul “Diskrete Strukturen”

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
14.1. Hörsaalübung 6. Übungswoche	15.1. Graphen und Bäume (Abgabe 1. Bonushalbserie)
21.1.	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe + 7. Übungsblatt)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen (Abgabe 2. Bonushalbserie)
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik
11.2.	12.2.
18.2. Prüfungswoche	19.2. Prüfung am 22.2.

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Definition Graph und einfache Eigenschaften
- Untergraphen und Zusammenhangskomponenten
- Eigenschaften ungerichteter Graphen

Bitte Fragen direkt stellen!

§12.1 Definition (Gerichteter Graph)

(Gerichtete) Graphen sind genau die algebraischen Strukturen des Typs $(1, 0, 0, 0)$.

§12.1 Definition (Gerichteter Graph)

(Gerichtete) Graphen sind genau die algebraischen Strukturen des Typs $(1, 0, 0, 0)$. Jeder Graph ist also eine Struktur (E, K)

- für eine Menge E der Ecken und
- eine Relation $K \subseteq E \times E$ der Kanten.

§12.1 Definition (Gerichteter Graph)

(Gerichtete) Graphen sind genau die algebraischen Strukturen des Typs $(1, 0, 0, 0)$. Jeder Graph ist also eine Struktur (E, K)

- für eine Menge E der Ecken und
- eine Relation $K \subseteq E \times E$ der Kanten.

Ein Element $(s, z) \in K$ heißt Kante von s zu z, wobei

- s die Startecke von (s, z) und
- z die Zielecke von (s, z) ist

§12.1 Definition (Gerichteter Graph)

(Gerichtete) Graphen sind genau die algebraischen Strukturen des Typs $(1, 0, 0, 0)$. Jeder Graph ist also eine Struktur (E, K)

- für eine Menge E der Ecken und
- eine Relation $K \subseteq E \times E$ der Kanten.

Ein Element $(s, z) \in K$ heißt Kante von s zu z, wobei

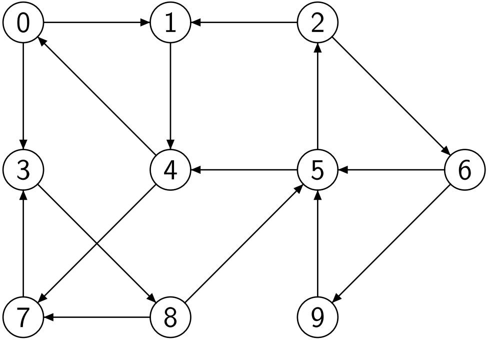
- s die Startecke von (s, z) und
- z die Zielecke von (s, z) ist

Notizen:

- jeder Verband ist ein Graph
- jede Äquivalenzrelation $\equiv \subseteq M \times M$ liefert Graph $(M, \equiv)$
- jede teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein Graph

Intuition:

- ein Graph besteht aus einer Menge von (benannten) Punkten die beliebig miteinander verbunden sind
- Ecke = benannter Punkt
- Kante = gerichtete Verbindung zwischen zwei Punkten



§12.2 Definition (Grapheigenschaften)

Ein Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist

- endlich gdw. E endlich ist (endlich viele Ecken)

§12.2 Definition (Grapheigenschaften)

Ein Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist

- endlich gdw. E endlich ist (endlich viele Ecken)
- ungerichtet gdw. K symmetrisch ist

§12.2 Definition (Grapheigenschaften)

Ein Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist

- endlich gdw. E endlich ist (endlich viele Ecken)
- ungerichtet gdw. K symmetrisch ist
- schlingenfrei gdw. K irreflexiv ist

§12.2 Definition (Grapheigenschaften)

Ein Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist

- endlich gdw. E endlich ist (endlich viele Ecken)
- ungerichtet gdw. K symmetrisch ist
- schlingenfrei gdw. K irreflexiv ist

Jede Kante $(s, s) \in K$ heißt Schlinge von $\mathcal{G}$.

§12.2 Definition (Grapheigenschaften)

Ein Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ ist

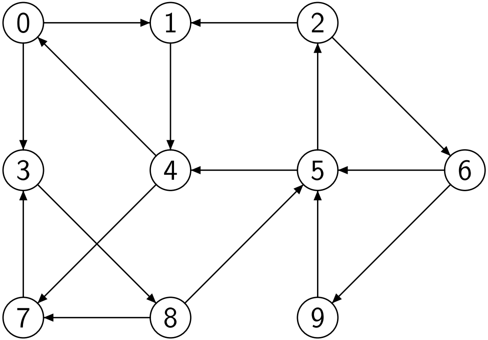
- endlich gdw. E endlich ist (endlich viele Ecken)
- ungerichtet gdw. K symmetrisch ist
- schlingenfrei gdw. K irreflexiv ist

Jede Kante $(s, s) \in K$ heißt Schlinge von $\mathcal{G}$.

Notizen:

- wir werden nur endliche Graphen betrachten
- $\mathcal{G}$ ist schlingenfrei gdw. $\mathcal{G}$ keine Schlinge hat

Dieser Graph ist nicht ungerichtet, aber endlich und schlingenfrei



§12.3 Definition (Vorgänger und Nachfolger)

Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph und $e \in E$ eine Ecke.

- Die Vorgänger von e sind $V_{\mathcal{G}}(e) = \{s \in E \mid (s, e) \in K\}$.

  (Ecken, die Kante zu e haben)

§12.3 Definition (Vorgänger und Nachfolger)

Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph und $e \in E$ eine Ecke.

- Die Vorgänger von e sind $V_{\mathcal{G}}(e) = \{s \in E \mid (s, e) \in K\}$.
  (Ecken, die Kante zu e haben)
- Die Nachfolger von e sind $N_{\mathcal{G}}(e) = \{z \in E \mid (e, z) \in K\}$.
  (Ecken, zu denen Kante von e aus existiert)

§12.3 Definition (Vorgänger und Nachfolger)

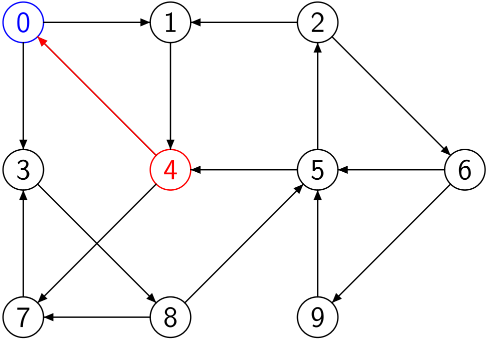
Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph und $e \in E$ eine Ecke.

- Die Vorgänger von e sind $V_{\mathcal{G}}(e) = \{s \in E \mid (s, e) \in K\}$.
  (Ecken, die Kante zu e haben)
- Die Nachfolger von e sind $N_{\mathcal{G}}(e) = \{z \in E \mid (e, z) \in K\}$.
  (Ecken, zu denen Kante von e aus existiert)
- Der Eingangsgrad von e ist $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e) = |V_{\mathcal{G}}(e)|$.
  (Anzahl der Vorgänger)

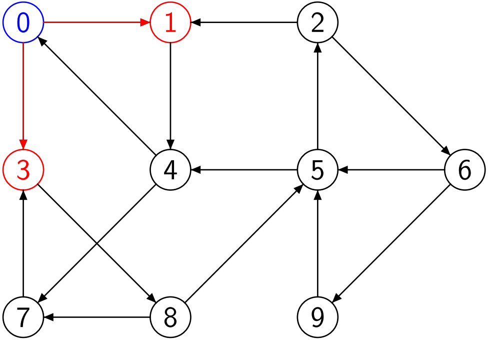
§12.3 Definition (Vorgänger und Nachfolger)

Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph und $e \in E$ eine Ecke.

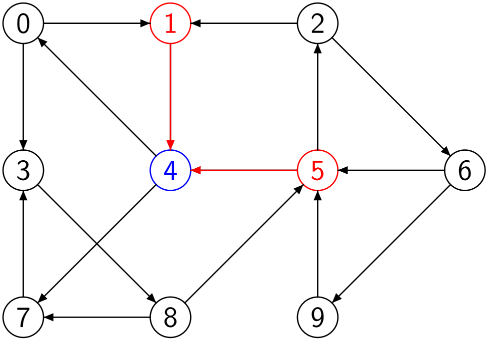
- Die Vorgänger von e sind $V_{\mathcal{G}}(e) = \{s \in E \mid (s, e) \in K\}$.
  (Ecken, die Kante zu e haben)
- Die Nachfolger von e sind $N_{\mathcal{G}}(e) = \{z \in E \mid (e, z) \in K\}$.
  (Ecken, zu denen Kante von e aus existiert)
- Der Eingangsgrad von e ist $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e) = |V_{\mathcal{G}}(e)|$.
  (Anzahl der Vorgänger)
- Der Ausgangsgrad von e ist $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(e) = |N_{\mathcal{G}}(e)|$.
  (Anzahl der Nachfolger)



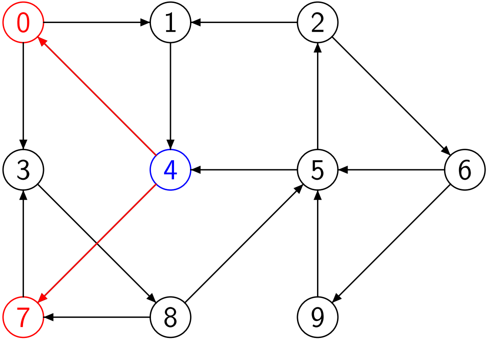
- $V_{\mathcal{G}}(0) = \{4\}$ und $N_{\mathcal{G}}(0) = \{1, 3\}$
  $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 1$ und $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 2$



- $V_{\mathcal{G}}(0) = \{4\}$ und $N_{\mathcal{G}}(0) = \{1, 3\}$
  $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 1$ und $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 2$



- $V_{\mathcal{G}}(0) = \{4\}$ und $N_{\mathcal{G}}(0) = \{1, 3\}$
  $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 1$ und $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 2$
- $V_{\mathcal{G}}(4) = \{1, 5\}$ und $N_{\mathcal{G}}(4) = \{0, 7\}$
  $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(4) = 2$ und $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(4) = 2$



- $V_{\mathcal{G}}(0) = \{4\}$ und $N_{\mathcal{G}}(0) = \{1, 3\}$
  $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 1$ und $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(0) = 2$
- $V_{\mathcal{G}}(4) = \{1, 5\}$ und $N_{\mathcal{G}}(4) = \{0, 7\}$
  $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(4) = 2$ und $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(4) = 2$

§12.4 Theorem

Für jeden Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ gilt $|K| = \sum_{s \in E} \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(s)$

§12.4 Theorem

Für jeden Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ gilt $|K| = \sum_{s \in E} \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(s)$

Beweis (direkt).

$$\begin{aligned} |K| &= |\{(s, z) \mid (s, z) \in K\}| \\ &= \sum_{s \in E} |\{(s, z) \mid (s, z) \in K\}| \\ &= \sum_{s \in E} |\{z \mid (s, z) \in K\}| \\ &= \sum_{s \in E} |N_{\mathcal{G}}(s)| = \sum_{s \in E} \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(s) \end{aligned}$$

□

Notiz:

- analog gilt $|K| = \sum_{z \in E} \text{in-grad}_{\mathcal{G}}(z)$

§12.5 Definition (Wege, Pfade und Kreise)

Sei (E, K) ein Graph und $n \in \mathbb{N}$.

- Eine Folge $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0, \ldots, e_n \in E$ heißt Weg von e_0 nach e_n gdw. $(e_i, e_{i+1}) \in K$ für alle $0 \leq i < n$.
  Ein solcher Weg hat die Länge n.

§12.5 Definition (Wege, Pfade und Kreise)

Sei (E, K) ein Graph und $n \in \mathbb{N}$.

- Eine Folge $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0, \ldots, e_n \in E$ heißt Weg von e_0 nach e_n gdw. $(e_i, e_{i+1}) \in K$ für alle $0 \leq i < n$.
  Ein solcher Weg hat die Länge n.
- Gilt zusätzlich $e_i \neq e_j$ für alle $0 \leq i < j < n$ und $e_n \notin \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, dann ist $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ sogar ein Pfad von e_0 nach e_n.
  (alle Ecken sind paarweise verschieden außer potentiell e_0 und e_n)

§12.5 Definition (Wege, Pfade und Kreise)

Sei (E, K) ein Graph und $n \in \mathbb{N}$.

- Eine Folge $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0, \ldots, e_n \in E$ heißt Weg von e_0 nach e_n gdw. $(e_i, e_{i+1}) \in K$ für alle $0 \leq i < n$.
  Ein solcher Weg hat die Länge n.
- Gilt zusätzlich $e_i \neq e_j$ für alle $0 \leq i < j < n$ und $e_n \notin \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, dann ist $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ sogar ein Pfad von e_0 nach e_n.
  (alle Ecken sind paarweise verschieden außer potentiell e_0 und e_n)
- Kreise sind genau die Pfade $(e_0 \to \cdots \to e_n)$
  mit $e_0 = e_n$ und $n \geq 3$.

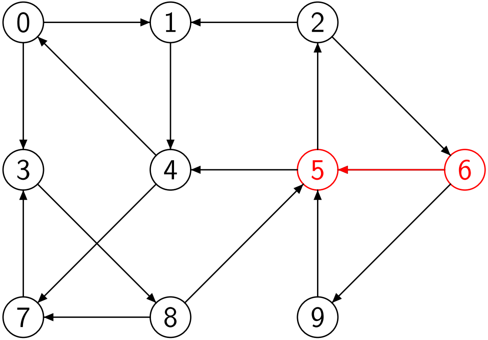
§12.5 Definition (Wege, Pfade und Kreise)

Sei (E, K) ein Graph und $n \in \mathbb{N}$.

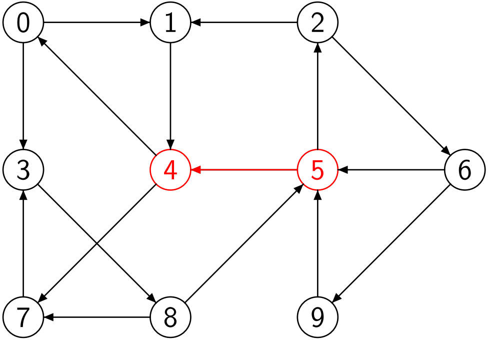
- Eine Folge $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0, \ldots, e_n \in E$ heißt Weg von e_0 nach e_n gdw. $(e_i, e_{i+1}) \in K$ für alle $0 \leq i < n$.
  Ein solcher Weg hat die Länge n.
- Gilt zusätzlich $e_i \neq e_j$ für alle $0 \leq i < j < n$ und $e_n \notin \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, dann ist $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ sogar ein Pfad von e_0 nach e_n.
  (alle Ecken sind paarweise verschieden außer potentiell e_0 und e_n)
- Kreise sind genau die Pfade $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0 = e_n$ und $n \geq 3$.

Notizen:

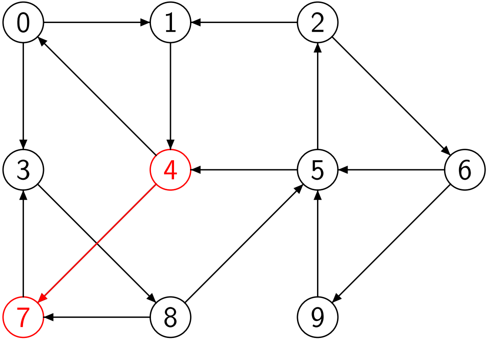
- Weg ist Sequenz von Ecken,
  so dass jede Ecke Nachfolger der vorherigen Ecke ist
- Pfad ist Weg aus verschiedenen Ecken;
  nur die letzte Ecke kann mit der ersten Ecke übereinstimmen



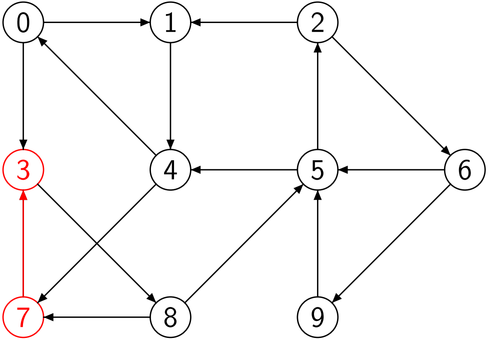
- $(6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



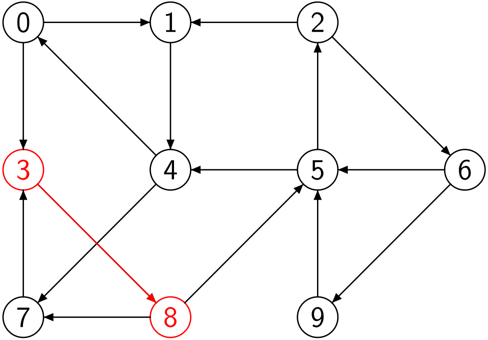
- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



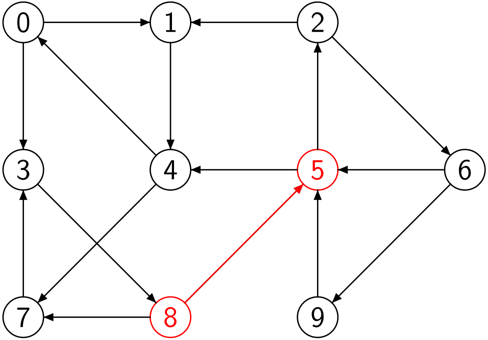
- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



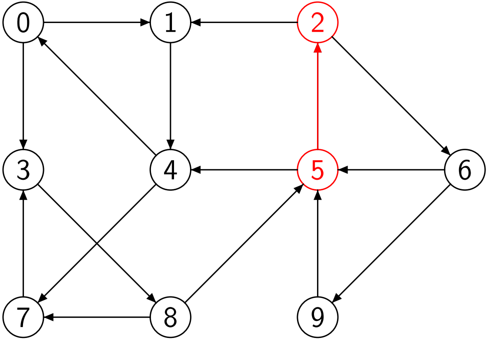
- $(6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



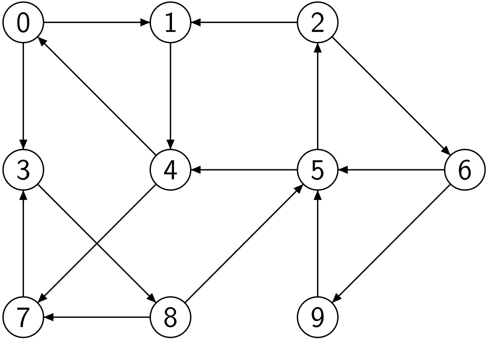
- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



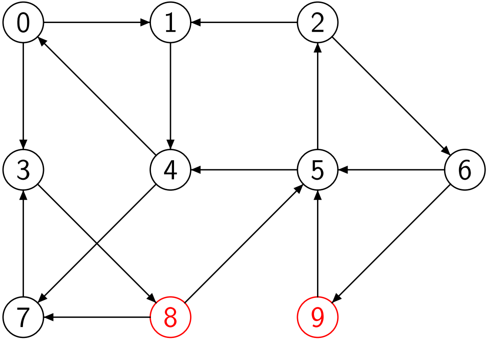
- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



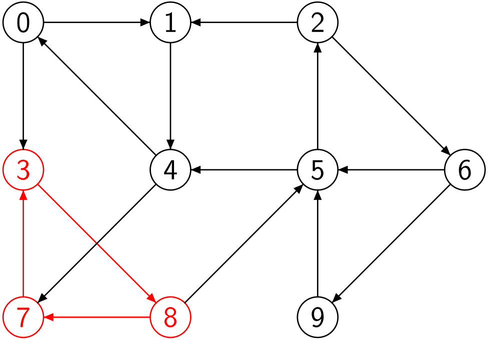
- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)



- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)
- $(3 \to 8 \to 9 \to 5 \to 2 \to 1 \to 0)$ ist kein Weg von 3 nach 0



- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)
- $(3 \to 8 \to 9 \to 5 \to 2 \to 1 \to 0)$ ist kein Weg von 3 nach 0



- $(6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2)$
  ist ein Weg von 6 nach 2, aber kein Pfad (wiederholt Ecke 5)
- $(3 \to 8 \to 9 \to 5 \to 2 \to 1 \to 0)$ ist kein Weg von 3 nach 0
- $(3 \to 8 \to 7 \to 3)$ ist ein Pfad von 3 nach 3 und ein Kreis

§12.6 Definition (kreisfrei)

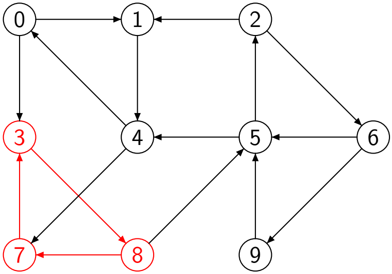
Ein Graph (E, K) ist kreisfrei gdw. er keinen Kreis enthält.

§12.6 Definition (kreisfrei)

Ein Graph (E, K) ist kreisfrei gdw. er keinen Kreis enthält.

Notizen:

- Schlingen sind nie Kreise
- Pfade $(s \to z \to s)$ sind keine Kreise
- dieser Graph ist nicht kreisfrei:



§12.7 Definition (beidseitige (starke) Erreichbarkeit)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph. Für alle $s, z \in E$ gelte $s \sim_{\mathcal{G}} z$ gdw.

- ein Weg von s nach z existiert und
- ein Weg von z nach s existiert.

§12.7 Definition (beidseitige (starke) Erreichbarkeit)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph. Für alle $s, z \in E$ gelte $s \sim_{\mathcal{G}} z$ gdw.

- ein Weg von s nach z existiert und
- ein Weg von z nach s existiert.

Notizen:

- beidseitige (starke) Erreichbarkeit
- (e) ist ein Weg der Länge 0 von e nach e — für alle $e \in E$

§12.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph.
Dann ist $\sim_{\mathcal{G}}$ eine Äquivalenzrelation auf E.

§12.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph.
Dann ist $\sim_{\mathcal{G}}$ eine Äquivalenzrelation auf E.

Beweis (direkt).

- reflexiv: Sei $e \in E$. Dann ist (e) ein Weg von e nach e und damit $e \sim_{\mathcal{G}} e$.

§12.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph.
Dann ist $\sim_{\mathcal{G}}$ eine Äquivalenzrelation auf E.

Beweis (direkt).

- reflexiv: Sei $e \in E$. Dann ist (e) ein Weg von e nach e und damit $e \sim_{\mathcal{G}} e$.
- symmetrisch: Sei $s \sim_{\mathcal{G}} z$. Dann existiert ein Weg von s nach z und ein Weg von z nach s. Also auch $z \sim_{\mathcal{G}} s$.

§12.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein Graph.
Dann ist $\sim_{\mathcal{G}}$ eine Äquivalenzrelation auf E.

Beweis (direkt).

- reflexiv: Sei $e \in E$. Dann ist (e) ein Weg von e nach e und damit $e \sim_{\mathcal{G}} e$.
- symmetrisch: Sei $s \sim_{\mathcal{G}} z$. Dann existiert ein Weg von s nach z und ein Weg von z nach s. Also auch $z \sim_{\mathcal{G}} s$.
- transitiv: Seien $s \sim_{\mathcal{G}} y$ und $y \sim_{\mathcal{G}} z$. Dann existieren Wege
  - $(s \to \cdots \to y)$ und $(y \to \cdots \to z)$ und
  - $(z \to \cdots \to y)$ und $(y \to \cdots \to s)$.

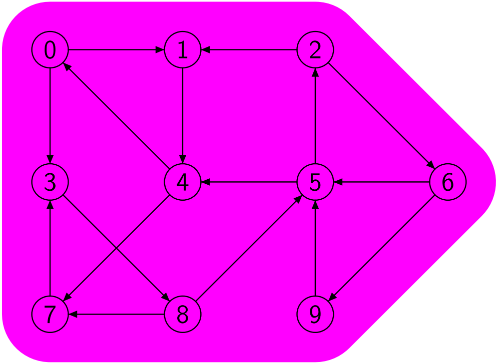
  Folglich existieren auch Wege $(s \to \cdots \to y \to \cdots \to z)$ und $(z \to \cdots \to y \to \cdots \to s)$ und damit $s \sim_{\mathcal{G}} z$. $\square$

§12.9 Definition (Zusammenhangskomponenten)

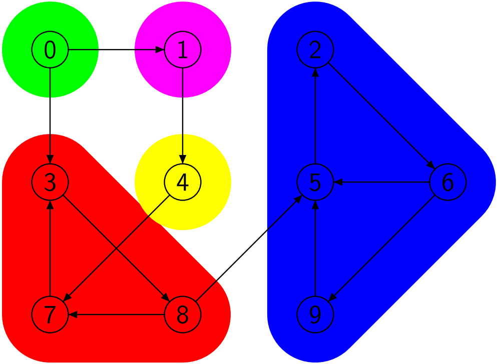
Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Die Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{G}}$ heißen starke Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$.

§12.9 Definition (Zusammenhangskomponenten)

Sei $\mathcal{G}$ ein Graph. Die Äquivalenzklassen von $\sim_{\mathcal{G}}$ heißen starke Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$.



hat 1 starke Zusammenhangskomponente $\{0, \ldots, 9\}$



hat 5 starke Zusammenhangskomponenten

$$\{\{0\}, \{1\}, \{2, 5, 6, 9\}, \{3, 7, 8\}, \{4\}\}$$

§12.10 Definition (Teilgraph)

Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ und $\mathcal{G}' = (E', K')$ zwei Graphen.
Dann ist $\mathcal{G}'$ ein Teilgraph von $\mathcal{G}$ gdw.

$$E' \subseteq E \qquad \text{und} \qquad K' \subseteq K$$

§12.10 Definition (Teilgraph)

Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ und $\mathcal{G}' = (E', K')$ zwei Graphen.
Dann ist $\mathcal{G}'$ ein Teilgraph von $\mathcal{G}$ gdw.

$$E' \subseteq E \qquad \text{und} \qquad K' \subseteq K$$

Gelten $E' \subseteq E$ und $K' = K \cap (E' \times E')$,
dann heißt $\mathcal{G}'$ auch E'-Teilgraph von $\mathcal{G}$.

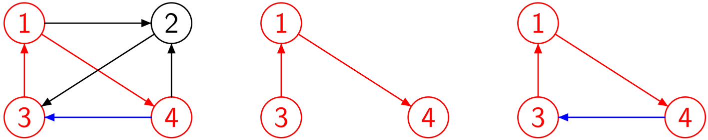
Bäume und Graphen — Grundlagen

§12.10 Definition (Teilgraph)

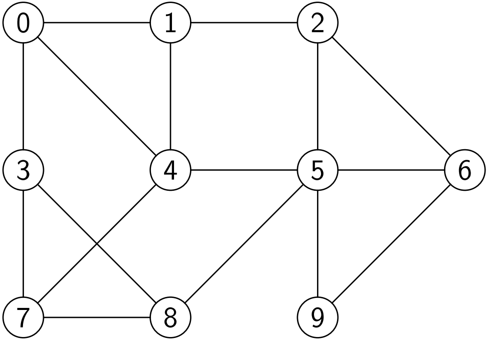
Seien $\mathcal{G} = (E, K)$ und $\mathcal{G}' = (E', K')$ zwei Graphen.
Dann ist $\mathcal{G}'$ ein Teilgraph von $\mathcal{G}$ gdw.

$$E' \subseteq E \qquad \text{und} \qquad K' \subseteq K$$

Gelten $E' \subseteq E$ und $K' = K \cap (E' \times E')$,
dann heißt $\mathcal{G}'$ auch E'-Teilgraph von $\mathcal{G}$.



- 2. Graph ist Teilgraph des 1. Graphen
- 3. Graph ist $\{1, 3, 4\}$-Teilgraph des 1. Graphen



Notizen:

- Kanten in beide Richtungen ohne Pfeil
- keine Boolesche Algebra ist ein ungerichteter Graph
  (da mind. 2 Elemente und antisymmetrisch)

§12.11 Theorem

Für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ und $e \in E$ gilt

- $V_{\mathcal{G}}(e) = N_{\mathcal{G}}(e)$
- $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e) = \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(e)$

§12.11 Theorem

Für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ und $e \in E$ gilt

- $V_{\mathcal{G}}(e) = N_{\mathcal{G}}(e)$
- $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e) = \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(e)$

Beweis.

Einfaches Überprüfen … $\square$

§12.11 Theorem

Für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ und $e \in E$ gilt

- $V_{\mathcal{G}}(e) = N_{\mathcal{G}}(e)$
- $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e) = \text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(e)$

Beweis.

Einfaches Überprüfen … $\square$

Notizen:

- $N_{\mathcal{G}}(e)$ heißt auch Nachbarschaft von e
- wir schreiben auch $\text{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ statt $\text{aus-grad}_{\mathcal{G}}(e)$ [oder $\text{in-grad}_{\mathcal{G}}(e)$] und nennen es Grad von e

§12.12 Theorem

In jedem endlichen, schlingenfreien und ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.

§12.12 Theorem

In jedem endlichen, schlingenfreien und ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.

Beweis (direkt).

Ein endlicher, schlingenfreier und ungerichteter Graph hat eine gerade Zahl $|K|$ an Kanten. Also ist nach §12.4 auch $|K| = \sum_{e \in E} \operatorname{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade.

§12.12 Theorem

In jedem endlichen, schlingenfreien und ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.

Beweis (direkt).

Ein endlicher, schlingenfreier und ungerichteter Graph hat eine gerade Zahl $|K|$ an Kanten. Also ist nach §12.4 auch $|K| = \sum_{e \in E} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade. Seien

$$E_g = \{e \in E \mid \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) \text{ gerade}\} \qquad \text{und} \qquad E_u = E \setminus E_g$$

Dann gilt $\sum_{e \in E} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) = \sum_{e \in E_g} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) + \sum_{e \in E_u} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$, womit $\sum_{e \in E_u} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade ist.

§12.12 Theorem

In jedem endlichen, schlingenfreien und ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.

Beweis (direkt).

Ein endlicher, schlingenfreier und ungerichteter Graph hat eine gerade Zahl $|K|$ an Kanten. Also ist nach §12.4 auch $|K| = \sum_{e \in E} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade. Seien

$$E_g = \{e \in E \mid \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) \text{ gerade}\} \qquad \text{und} \qquad E_u = E \setminus E_g$$

Dann gilt $\sum_{e \in E} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) = \sum_{e \in E_g} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) + \sum_{e \in E_u} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$, womit $\sum_{e \in E_u} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade ist. Da $\mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ für jedes $e \in E_u$ ungerade ist, muss $|E_u|$ gerade sein. □

§12.12 Theorem

In jedem endlichen, schlingenfreien und ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (E, K)$ ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.

Beweis (direkt).

Ein endlicher, schlingenfreier und ungerichteter Graph hat eine gerade Zahl $|K|$ an Kanten. Also ist nach §12.4 auch $|K| = \sum_{e \in E} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade. Seien

$$E_g = \{e \in E \mid \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) \text{ gerade}\} \qquad \text{und} \qquad E_u = E \setminus E_g$$

Dann gilt $\sum_{e \in E} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) = \sum_{e \in E_g} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e) + \sum_{e \in E_u} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$, womit $\sum_{e \in E_u} \mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ gerade ist. Da $\mathrm{grad}_{\mathcal{G}}(e)$ für jedes $e \in E_u$ ungerade ist, muss $|E_u|$ gerade sein. $\square$

Notiz: Auf jedem Empfang schütteln gerade viele Gäste ungerade vielen Gästen die Hand

§12.13 Theorem

Jeder endliche ungerichtete Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ hat mindestens $|E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor$ starke Zusammenhangskomponenten.

§12.13 Theorem

Jeder endliche ungerichtete Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ hat mindestens $|E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor$ starke Zusammenhangskomponenten.

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 1/2).

- IA: Sei $|K| = 0$. Dann gibt es keine Kanten und nur Wege der Länge 0. Damit bildet jede Ecke ihre eigene starke Zusammenhangskomponente, wovon es $|E| = |E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor$ gibt.

§12.13 Theorem

Jeder endliche ungerichtete Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ hat mindestens $|E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor$ starke Zusammenhangskomponenten.

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 1/2).

- IA: Sei $|K| = 0$. Dann gibt es keine Kanten und nur Wege der Länge 0. Damit bildet jede Ecke ihre eigene starke Zusammenhangskomponente, wovon es $|E| = |E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor$ gibt.
- IH: Gelte die Aussage für Graphen mit höchstens k Kanten.
- IS: Sei $|K| = k + 1$ und wähle $(s, z) \in K$ beliebig. Für $s = z$ hat $\mathcal{G}$ die gleiche Anzahl an Komponenten wie der Graph $(E, K \setminus \{(s, z)\})$, der gemäß IH mind. $|E| - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ starke Zusammenhangskomponenten hat. Da $|E| - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \geq |E| - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$, gilt damit die Aussage.

Beweis (vollständige Induktion über $|K|$; 2/2).

- IS: Andernfalls hat $\mathcal{G}' = (E, K \setminus \{(s,z), (z,s)\})$ mind. $|E| - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ starke Zusammenhangskomponenten gemäß IH. Aufgrund von (s,z) hat $\mathcal{G}$ höchstens eine Komponente weniger als $\mathcal{G}'$ (denn evtl. verbindet (s,z) zwei Komponenten), also hat (E,K) mind. $|E| - \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1 = |E| - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ starke Zusammenhangskomponenten. □

Illustration zur Hinzufügung einer Kante:

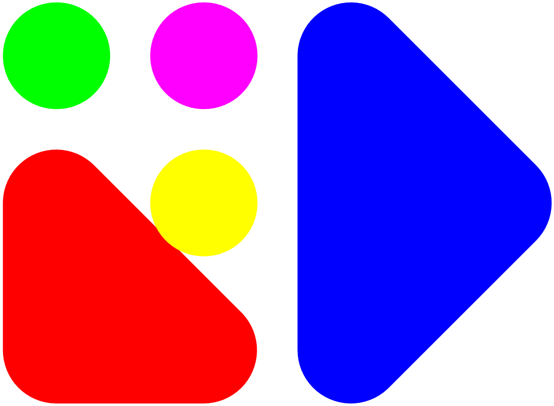
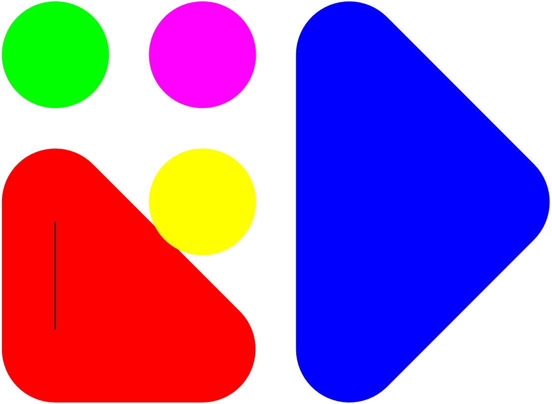
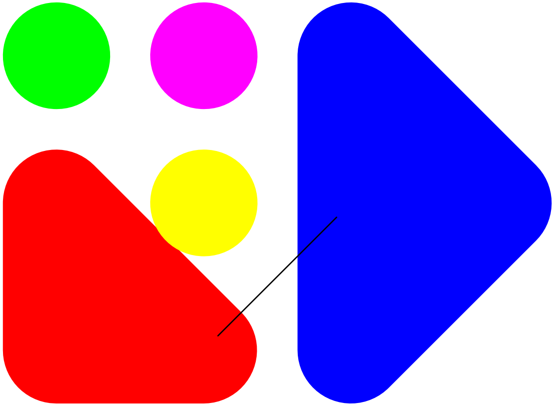


Illustration zur Hinzufügung einer Kante:



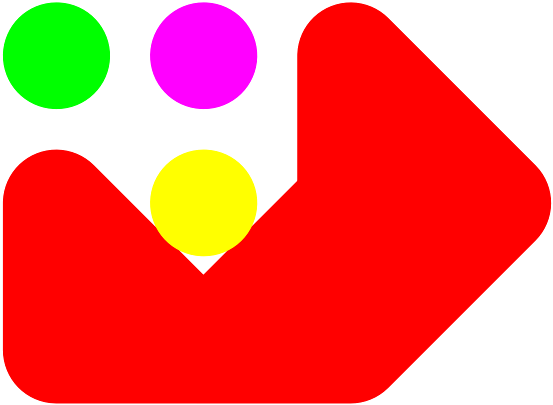
Kante innerhalb einer Komponente

Illustration zur Hinzufügung einer Kante:



Kante zwischen zwei Komponenten

Illustration zur Hinzufügung einer Kante:



Kante zwischen zwei Komponenten

§12.14 Korollar

Jeder endliche ungerichtete Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ mit genau 1 starker Zusammenhangskomponente hat mind. $2 \cdot (|E| - 1)$ Kanten.

§12.14 Korollar

Jeder endliche ungerichtete Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ mit genau 1 starker Zusammenhangskomponente hat mind. $2 \cdot (|E| - 1)$ Kanten.

Beweis (direkt).

Gemäß §12.13 gilt $|E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor \leq 1$. Durch Umformen erhalten wir $|E| \leq \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor + 1 \leq \frac{|K|}{2} + 1$. Durch weiteres Umformen erhalten wir

$$|K| \geq 2 \cdot (|E| - 1)$$

□

§12.14 Korollar

Jeder endliche ungerichtete Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ mit genau 1 starker Zusammenhangskomponente hat mind. $2 \cdot (|E| - 1)$ Kanten.

Beweis (direkt).

Gemäß §12.13 gilt $|E| - \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor \leq 1$. Durch Umformen erhalten wir $|E| \leq \lfloor \frac{|K|}{2} \rfloor + 1 \leq \frac{|K|}{2} + 1$. Durch weiteres Umformen erhalten wir

$$|K| \geq 2 \cdot (|E| - 1)$$

□

Notiz:

- es gibt Graphen mit mind. $2 \cdot (|E| - 1)$ Kanten, die mehr als 1 starke Zusammenhangskomponente haben

Zusammenfassung

- Definition und einfache Eigenschaften von Graphen
- Ungerichtete Graphen und deren Eigenschaften

Nächste Woche erscheint das letzte Extrablatt im AlmaWeb.