Diskrete Strukturen

Vorlesung 8: Kardinalitäten & Verbände

4. Dezember 2018

Nächste Termine — Modul “Diskrete Strukturen”

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
3.12. **dies academicus** 4. Übungswoche	4.12. Kardinalitäten & Verbände
10.12. Hörsaalübung	11.12. Verbände (4. Abgabe + 5. Übungsblatt)
17.12. Hörsaalübung 5. Übungswoche	18.12. Boolesche Algebren
24.12.	25.12.
31.12.	1.1.

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
7.1.	8.1. Körper (5. Abgabe + 6. Übungsblatt)
14.1. Hörsaalübung 6. Übungswoche	15.1. Graphen und Bäume
21.1.	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe + 7. Übungsblatt)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik

Organisation

Hausaufgabe 4.2(b) Abbildung (i):

- statt $\mathsf{abs}\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sollte es $\mathsf{abs}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ heißen
- neue Version im AlmaWeb ist bereits korrigiert

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen
2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Ordnung der Kardinalitäten
- Endlichkeit & Abzählbarkeit
- kleinste obere Schranke und größte untere Schranke
- Einführung Verbände
- Eigenschaften von Verbänden

Bitte Fragen direkt stellen!

Definition (§7.6 gleichmächtig)

Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$,
gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert

Definition (§7.6 gleichmächtig)

Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$,
gdw. eine bijektive Funktion $f : M \to N$ existiert

Definition (§7.10 Ordnung der Kardinalitäten)

Die Menge N ist mächtiger als die Menge M, kurz $|M| \leq |N|$,
(genauer: die Kardinalität von N ist größer als die von M)
gdw. eine injektive Funktion $f : M \to N$ existiert.

Auftaktfragen

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$
- $|M| \leq |M \cup N|$
- $|M| \leq |M \cap N|$
- $|M| \leq |M \times N|$
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$
- $|M| \leq |M^c|$

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$
- $|M| \leq |M \cap N|$
- $|M| \leq |M \times N|$
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$
- $|M| \leq |M^c|$

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$ ✓
- $|M| \leq |M \cap N|$
- $|M| \leq |M \times N|$
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$
- $|M| \leq |M^c|$

Auftaktfragen

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$ ✓
- $|M| \leq |M \cap N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times N|$
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$
- $|M| \leq |M^c|$

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$ ✓
- $|M| \leq |M \cap N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$
- $|M| \leq |M^c|$

Auftaktfragen

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$ ✓
- $|M| \leq |M \cap N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$ ✓
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$
- $|M| \leq |M^c|$

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$ ✓
- $|M| \leq |M \cap N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$ ✓
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ ✓
- $|M| \leq |M^c|$

Welche Aussagen gelten für beliebige Mengen M und N?

- $|\emptyset| \leq |M|$ ✓
- $|M| \leq |M \cup N|$ ✓
- $|M| \leq |M \cap N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times N|$ ✗
- $|M| \leq |M \times \mathbb{N}|$ ✓
- $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ ✓
- $|M| \leq |M^c|$ ✗

§8.1 Theorem

$\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

§8.1 Theorem

$\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis (direkt).

- reflexiv: Für jede Menge M ist $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ injektiv, also gilt $|M| \leq |M|$.

§8.1 Theorem

$\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis (direkt).

- reflexiv: Für jede Menge M ist $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ injektiv, also gilt $|M| \leq |M|$.
- antisymmetrisch: Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to M$. Dann existiert auch eine bijektive Funktion $h \colon M \to N$ nach §7.5 und damit $|M| = |N|$.

§8.1 Theorem

$\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Kardinalitäten.

Beweis (direkt).

- reflexiv: Für jede Menge M ist $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ injektiv, also gilt $|M| \leq |M|$.
- antisymmetrisch: Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Also existieren injektive Funktionen $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to M$. Dann existiert auch eine bijektive Funktion $h \colon M \to N$ nach §7.5 und damit $|M| = |N|$.
- transitiv: Seien $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |P|$. Dann existieren injektive Funktionen $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to P$. Dann ist $(f \,;\, g) \colon M \to P$ injektiv nach §5.14 und damit $|M| \leq |P|$. $\square$

§8.2 Theorem (Satz von Hartogs)

Die Kardinalitäten $\mathcal{K}$ bilden eine total geordnete Menge $(\mathcal{K}, \leq)$ gdw. das Auswahlaxiom gilt

Friedrich Moritz Hartogs (* 1874; † 1943)

- dtsch. Mathematiker
- Funktionentheorie
- wesentliche Beiträge zu Kardinalitäten

§8.3 Theorem

Eine Funktion $f\colon M \to M$ auf einer endlichen Menge M
ist surjektiv genau dann, wenn sie injektiv ist

§8.3 Theorem

Eine Funktion $f\colon M \to M$ auf einer endlichen Menge M
ist surjektiv genau dann, wenn sie injektiv ist

Beweis (beidseitige Implikationen).

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} = \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{M}$ eine Zerlegung von M. Sei $c_m = |f^{-1}(\{m\})|$ für alle $m \in f(M)$. Es gilt $c_m \geq 1$ und weiterhin $|M| = |\bigcup \mathcal{M}| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.

§8.3 Theorem

Eine Funktion $f \colon M \to M$ auf einer endlichen Menge M
ist surjektiv genau dann, wenn sie injektiv ist

Beweis (beidseitige Implikationen).

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} = \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{M}$ eine Zerlegung von M. Sei $c_m = |f^{-1}(\{m\})|$ für alle $m \in f(M)$. Es gilt $c_m \geq 1$ und weiterhin $|M| = |\bigcup \mathcal{M}| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.

$(\to)$ (indirekt) Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.

§8.3 Theorem

Eine Funktion $f\colon M \to M$ auf einer endlichen Menge M ist surjektiv genau dann, wenn sie injektiv ist

Beweis (beidseitige Implikationen).

Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} = \{f^{-1}(\{m\}) \mid m \in f(M)\}$. Offenbar ist $\mathcal{M}$ eine Zerlegung von M. Sei $c_m = |f^{-1}(\{m\})|$ für alle $m \in f(M)$. Es gilt $c_m \geq 1$ und weiterhin $|M| = |\bigcup \mathcal{M}| = \sum_{m \in f(M)} c_m$.

($\rightarrow$) (indirekt) Sei f surjektiv, aber nicht injektiv. Dann ist $f(M) = M$ und $c_m \geq 2$ für ein $m \in M$. Es folgt jedoch $\sum_{m \in M} c_m > |M|$. Widerspruch.

($\leftarrow$) (indirekt) Sei f injektiv, aber nicht surjektiv. Dann ist $c_m = 1$ für alle $m \in f(M)$ und $|f(M)| < |M|$. Also auch $\sum_{m \in f(M)} c_m = |f(M)| < |M|$. Widerspruch. □

Notizen:

- dies gilt nicht für unendliche Mengen
- verdoppeln: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv

§8.4 Definition (Endlichkeit)

Eine Menge M ist endlich gdw.
jede Funktion $f\colon M \to M$ surjektiv ist gdw. sie injektiv ist.

§8.4 Definition (Endlichkeit)

Eine Menge M ist endlich gdw.
jede Funktion $f\colon M \to M$ surjektiv ist gdw. sie injektiv ist.

Notizen:

- entspricht der natürlichen Vorstellung
- wir identifizieren ‘endliche Kardinalitäten’ mit $\mathbb{N}$
  (jede endliche Kardinalität entspricht einer natürlichen Zahl)
- aber $\mathbb{N}$ selbst ist nicht endlich

§8.5 Definition (Abzählbarkeit)

Eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$
(d.h., sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat)

§8.5 Definition (Abzählbarkeit)

Eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$
(d.h., sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat)

Beispiele

- endliche Mengen sind abzählbar
- $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar (§7.8)

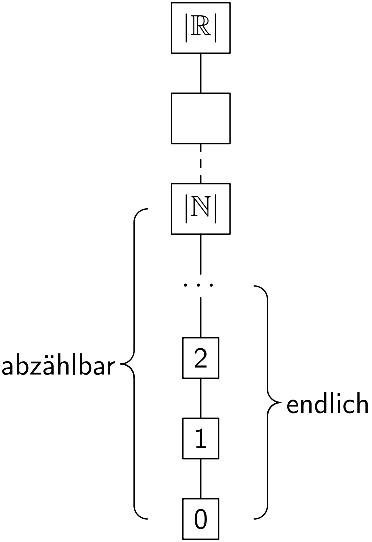
§8.5 Definition (Abzählbarkeit)

Eine Menge M ist abzählbar gdw. $|M| \leq |\mathbb{N}|$
(d.h., sie höchstens die Kardinalität von $\mathbb{N}$ hat)

Beispiele

- endliche Mengen sind abzählbar
- $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar (§7.8)
- $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (§7.9)

Gibt es unendlich viele unendliche Kardinalitäten?



§8.6 Theorem (Satz von Cantor)

Für jede Menge M gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$

Beweis (direkt und indirekt).

Sei $f : M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

§8.6 Theorem (Satz von Cantor)

Für jede Menge M gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$

Beweis (direkt und indirekt).

Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$. Ferner sei

$$X = \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \quad .$$

§8.6 Theorem (Satz von Cantor)

Für jede Menge M gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$

Beweis (direkt und indirekt).

Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$. Ferner sei

$$X = \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \quad .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$.

§8.6 Theorem (Satz von Cantor)

Für jede Menge M gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ und $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$

Beweis (direkt und indirekt).

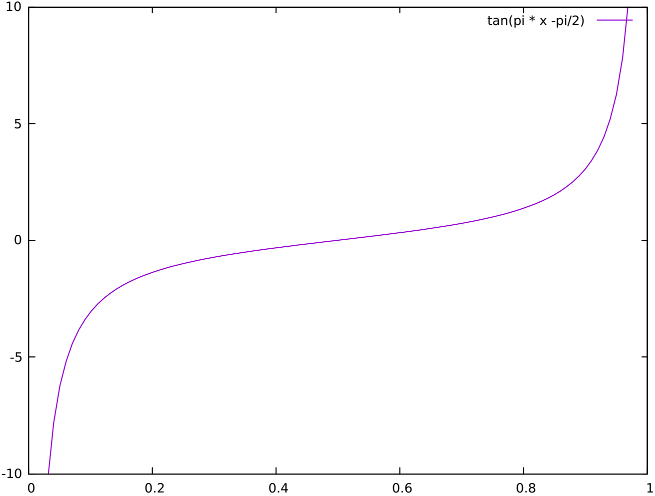
Sei $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$, so dass $f(m) = \{m\}$. Da f injektiv ist, gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Wir zeigen nun $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ indirekt. Sei also $|M| = |\mathcal{P}(M)|$. Damit existiert eine bijektive Funktion $g\colon M \to \mathcal{P}(M)$. Ferner sei

$$X = \{x \in M \mid x \notin g(x)\} \enspace .$$

Da g surjektiv ist, existiert $m \in M$, so dass $g(m) = X$.
Es gilt folglich $m \in g(m) = X$ gdw. $m \notin g(m)$. Widerspruch! $\square$

Die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in (0,1)$ ist bijektiv.



§8.7 Theorem

Es gilt $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mit $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

§8.7 Theorem

Es gilt $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ mit $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

Notizen:

- siehe vorherige Folie für die bijektive Funktion
- wir verzichten auf den Beweis der Bijektivität

§8.8 Theorem (Cantor 1874)

Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis (direkt).

Wir wissen bereits aus §8.7, dass $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Wir zeigen zwei injektive Funktionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ und verwenden dann §7.5 (Cantor-Schröder-Bernstein).

§8.8 Theorem (Cantor 1874)

Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis (direkt).

Wir wissen bereits aus §8.7, dass $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Wir zeigen zwei injektive Funktionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ und verwenden dann §7.5 (Cantor-Schröder-Bernstein).

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen. Dann sei
  $f(x) = \{[d_1]_{10},\ [d_1 d_2]_{10},\ [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$.
  Diese Funktion f ist offenbar injektiv.

§8.8 Theorem (Cantor 1874)

Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis (direkt).

Wir wissen bereits aus §8.7, dass $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Wir zeigen zwei injektive Funktionen $f\colon (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ und verwenden dann §7.5 (Cantor-Schröder-Bernstein).

- Jede reelle Zahl $x \in (0,1)$ lässt sich als $x = [0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots]_{10}$ mit $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ darstellen. Dann sei
  $f(x) = \{[d_1]_{10}, [d_1 d_2]_{10}, [d_1 d_2 d_3]_{10}, \ldots\}$.
  Diese Funktion f ist offenbar injektiv.
- Sei $X \subseteq \mathbb{N}$. Wir konstruieren die reelle Zahl $g(X) = [0, 1 b_0 b_1 b_2 \cdots]_{10}$, so dass $b_i \in \{0, 5\}$ mit $b_i = 5$ gdw. $i \in X$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Offenbar ist auch diese Funktion g injektiv. $\square$

Illustration:

- wir kodieren $\frac{\pi}{10} = 0,31415927\cdots$ als

  $f(\frac{\pi}{10}) = \{3,\ 31,\ 314,\ 3.141,\ 31.415,\ 314.159,\ 3.141.592,\ 31.415.926, \ldots\}$

Illustration:

- wir kodieren $\frac{\pi}{10} = 0,31415927\cdots$ als

$$f(\tfrac{\pi}{10}) = \{3,\ 31,\ 314,\ 3.141,\ 31.415,\ 314.159,\ 3.141.592,\ 31.415.926, \dots\}$$

- umgekehrt kodieren wir die Menge $G = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots\}$ als

$$g(G) = 0,15050505\cdots\ ,$$

  in der genau an den geraden Stellen hinter dem Komma die Ziffer 5 vorkommt

Wir schreiben auch $m < m'$, falls $m \leq m'$ und $m \neq m'$

§8.9 Korollar

Es gibt unendlich viele unendliche Kardinalitäten.

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

Wir schreiben auch $m < m'$, falls $m \leq m'$ und $m \neq m'$

§8.9 Korollar

Es gibt unendlich viele unendliche Kardinalitäten.

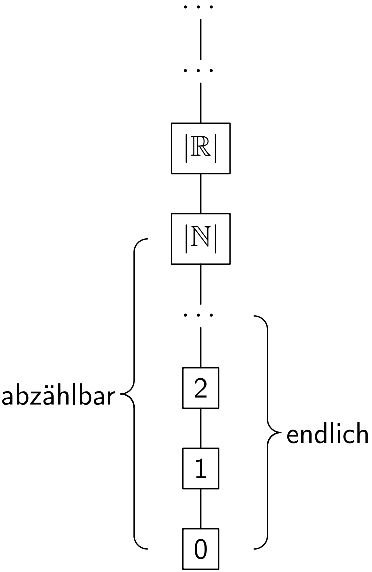
$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

Notizen:

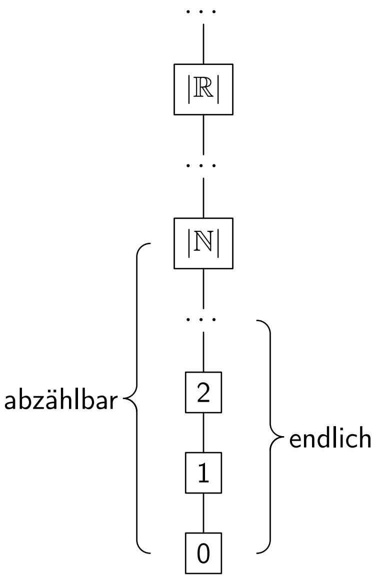
- Kontinuumshypothese (CH) von Cantor:
  es gibt keine Menge M, so dass $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$
- CH ist unabhängig von ZFC (Gödel, Cohen)

Funktionen — Kardinalität

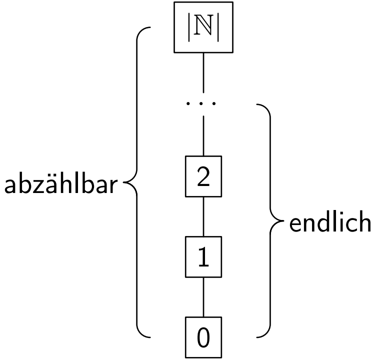
Kontinuumshypothese gilt:



Kontinuumshypothese gilt nicht:



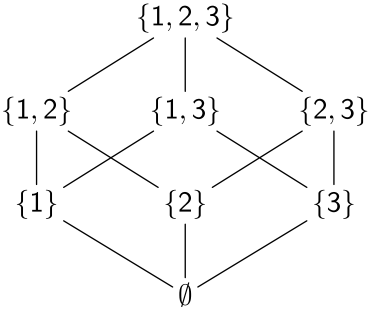
In der diskreten Mathematik nur abzählbare Strukturen
(sogar größtenteils endliche Strukturen)



Definition (§6.7 Ordnungsrelation)

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation
gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Das Paar $(M, \preceq)$ heißt dann teilweise geordnete Menge.
Ist $\preceq$ vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge.



Definition (§6.9–10 obere Schranke, größte und maximale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$
  (größer als alle Elemente aus X)

Definition (§6.9–10 obere Schranke, größte und maximale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$

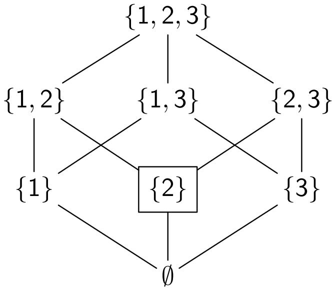
(größer als alle Elemente aus X)

Notation:
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$

$$\uparrow X = \{m \in M \mid \forall x(x \in X \to x \preceq m)\}$$

Menge der oberen Schranken von X

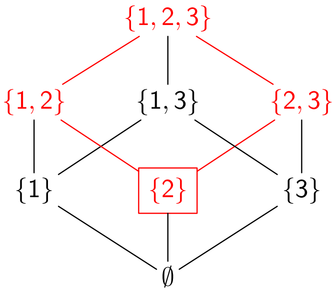
Verbände — Wiederholung



Beispiele

- obere Schranken von $\{\{2\}\}$:

Verbände — Wiederholung

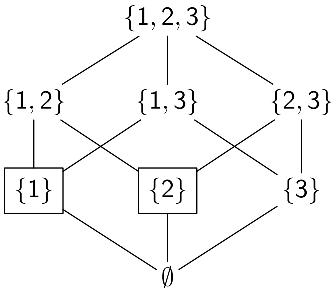


Beispiele

- obere Schranken von $\{\{2\}\}$:

$$\uparrow\{\{2\}\} = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Verbände — Wiederholung



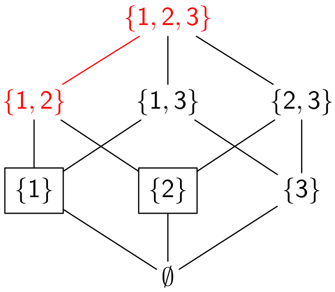
Beispiele

- obere Schranken von $\{\{2\}\}$:

$$\uparrow\{\{2\}\} = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

- obere Schranken von $\{\{1\}, \{2\}\}$:

Verbände — Wiederholung



Beispiele

- obere Schranken von $\{\{2\}\}$:

$$\uparrow\{\{2\}\} = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

- obere Schranken von $\{\{1\}, \{2\}\}$:

$$\uparrow\{\{1\}, \{2\}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Definition (§6.9–10 obere Schranke, größte und maximale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

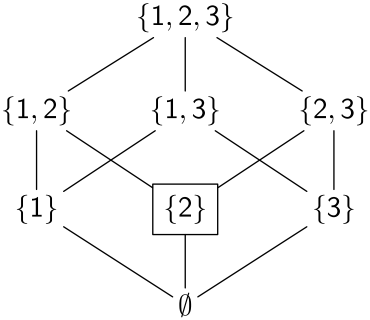
- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$
  (größer als alle Elemente aus X)
- das größte Element von X gdw. $m \in X$ und $m \in {\uparrow}X$ ist
  (obere Schranke von X, die in X liegt)

Notation:
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$

$$\uparrow X = \{m \in M \mid \forall x (x \in X \to x \preceq m)\}$$

Menge der oberen Schranken von X

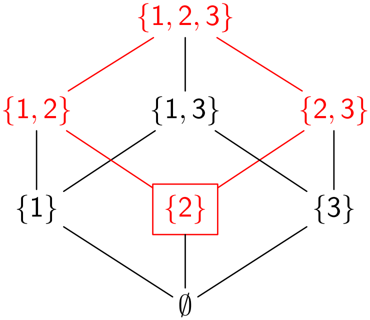
Verbände — Wiederholung



Beispiele

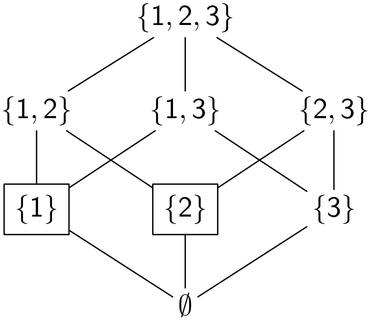
- größte Element von $\{\{2\}\}$

Verbände — Wiederholung



Beispiele

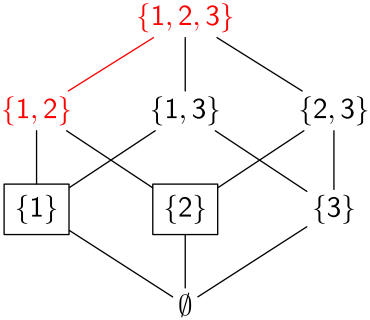
- größte Element von $\{\{2\}\}$ ist $\{2\}$



Beispiele

- größte Element von $\{\{2\}\}$ ist $\{2\}$
- größte Element von $\{\{1\}, \{2\}\}$

Verbände — Wiederholung



Beispiele

- größte Element von $\{\{2\}\}$ ist $\{2\}$
- größte Element von $\{\{1\}, \{2\}\}$ existiert nicht

Definition (§6.9–10 obere Schranke, größte und maximale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

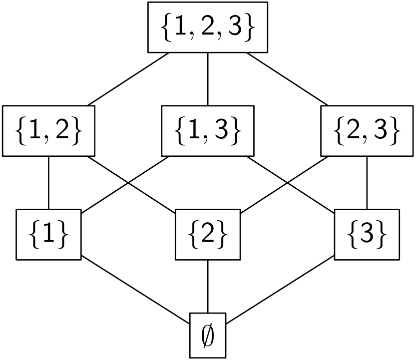
- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$
  (größer als alle Elemente aus X)
- das größte Element von X gdw. $m \in X$ und $m \in \uparrow X$ ist
  (obere Schranke von X, die in X liegt)
- maximal in X gdw. $m \in X$ und $m \not\prec x$ für alle $x \in X$
  (es gibt keine echt größeren Elemente in X)

Notation:
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$

$$\uparrow X = \{m \in M \mid \forall x(x \in X \to x \preceq m)\}$$

Menge der oberen Schranken von X

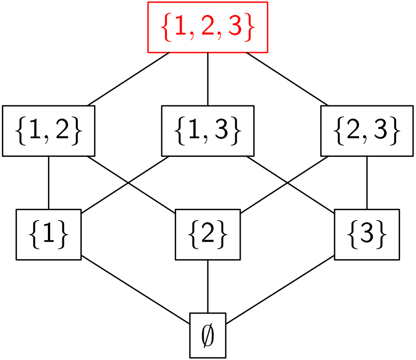
Verbände — Wiederholung



Beispiele

- Maximal in $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$:

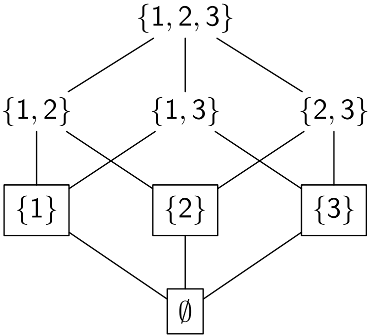
Verbände — Wiederholung



Beispiele

- Maximal in $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$: nur $\{1, 2, 3\}$

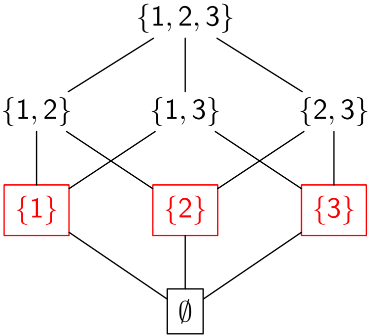
Verbände — Wiederholung



Beispiele

- Maximal in $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$: nur $\{1, 2, 3\}$
- Maximal in $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$:

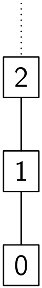
Verbände — Wiederholung



Beispiele

- Maximal in $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$: nur $\{1, 2, 3\}$
- Maximal in $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$: die Mengen $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$

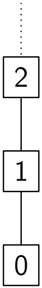
Verbände — Wiederholung



Beispiele

- Maximal in $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$: nur $\{1, 2, 3\}$
- Maximal in $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$: die Mengen $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$
- Maximal in $\mathbb{N}$ für $(\mathbb{N}, \leq)$:

Verbände — Wiederholung



Beispiele

- Maximal in $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$: nur $\{1, 2, 3\}$
- Maximal in $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$: die Mengen $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$
- Maximal in $\mathbb{N}$ für $(\mathbb{N}, \leq)$: keins

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- Jede obere Schranke für X ist maximal in M

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- Jede obere Schranke für X ist maximal in X

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗
- Jedes maximale Element in M ist obere Schranke für M

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗
- ~~Jedes maximale Element in M ist obere Schranke für M~~ ✗

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗
- ~~Jedes maximale Element in M ist obere Schranke für M~~ ✗
- Das größte Element von X ist maximal in X

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗
- ~~Jedes maximale Element in M ist obere Schranke für M~~ ✗
- Das größte Element von X ist maximal in X ✓

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗
- ~~Jedes maximale Element in M ist obere Schranke für M~~ ✗
- Das größte Element von X ist maximal in X ✓
- Das größte Element von X ist obere Schranke für X

§8.10 Zusammenhänge

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$ beliebig.

- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in M~~ ✗
- ~~Jede obere Schranke für X ist maximal in X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist maximal in M ✓
- ~~Jede obere Schranke für M ist das größte Element von X~~ ✗
- Jede obere Schranke für M ist das größte Element von M ✓
- ~~Jedes maximale Element in X ist obere Schranke für X~~ ✗
- ~~Jedes maximale Element in M ist obere Schranke für M~~ ✗
- Das größte Element von X ist maximal in X ✓
- Das größte Element von X ist obere Schranke für X ✓

Definition (§6.10 untere Schranke, kleinstes und minimale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine untere Schranke für X gdw. $m \preceq x$ für alle $\underline{x \in X}$

  (kleiner als alle Elemente aus X)

Definition (§6.10 untere Schranke, kleinstes und minimale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine untere Schranke für X gdw. $m \preceq x$ für alle $\underline{x \in X}$

  (kleiner als alle Elemente aus X)

Notation:
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$

$$\downarrow X = \{m \in M \mid \forall x(x \in X \rightarrow m \preceq x)\}$$

Menge der unteren Schranken von X

Definition (§6.10 untere Schranke, kleinstes und minimale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine untere Schranke für X gdw. $m \preceq x$ für alle $\underline{x \in X}$
  (kleiner als alle Elemente aus X)
- das kleinste Element von X gdw. $m \in X$ und $m \in {\downarrow}X$
  (untere Schranke von X, die in X liegt)

Notation:
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$

$$ {\downarrow}X = \{m \in M \mid \forall x(x \in X \to m \preceq x)\} $$

Menge der unteren Schranken von X

Definition (§6.10 untere Schranke, kleinstes und minimale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine untere Schranke für X gdw. $m \preceq x$ für alle $\underline{x \in X}$
  (kleiner als alle Elemente aus X)
- das kleinste Element von X gdw. $m \in X$ und $m \in {\downarrow}X$
  (untere Schranke von X, die in X liegt)
- minimal in X gdw. $m \in X$ und $x \not\prec m$ für alle $x \in X$
  (es gibt keine echt kleineren Elemente in X)

Notation:
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$

$${\downarrow}X = \{m \in M \mid \forall x(x \in X \rightarrow m \preceq x)\}$$

Menge der unteren Schranken von X

Verbände — Wiederholung

Notizen:

- es gibt höchstens ein größtes (bzw. kleinstes) Element von X
  (einfacher Beweis unter Nutzung von Antisymmetrie)

Notizen:

- es gibt höchstens ein größtes (bzw. kleinstes) Element von X
  (einfacher Beweis unter Nutzung von Antisymmetrie)
- aber es kann mehrere maximale (bzw. minimale) Elemente in X geben

Notizen:

- es gibt höchstens ein größtes (bzw. kleinstes) Element von X
  (einfacher Beweis unter Nutzung von Antisymmetrie)
- aber es kann mehrere maximale (bzw. minimale) Elemente in X geben
- $\uparrow\emptyset = \downarrow\emptyset = M$

§8.11 Definition (Supremum und Infimum)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.

- Das Supremum von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$

  (kleinste obere Schranke für X)

§8.11 Definition (Supremum und Infimum)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.

- Das Supremum von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$
  (kleinste obere Schranke für X)
- Das Infimum von X ist das größte Element von $\downarrow X$
  (größte untere Schranke für X)

§8.11 Definition (Supremum und Infimum)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.

- Das Supremum von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$
  (kleinste obere Schranke für X)
- Das Infimum von X ist das größte Element von $\downarrow X$
  (größte untere Schranke für X)
- Sollten solche Schranken nicht existieren,
  dann existiert auch das Supremum/Infimum nicht

§8.11 Definition (Supremum und Infimum)

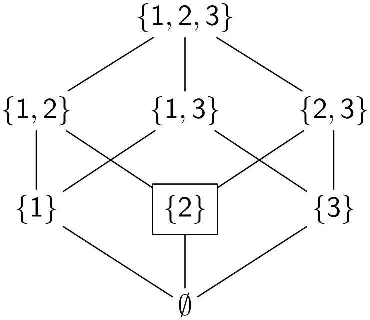
Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.

- Das Supremum von X ist das kleinste Element von $\uparrow X$

  (kleinste obere Schranke für X)
- Das Infimum von X ist das größte Element von $\downarrow X$

  (größte untere Schranke für X)
- Sollten solche Schranken nicht existieren,
  dann existiert auch das Supremum/Infimum nicht
- Wir schreiben auch
  - $\sup X$ für das Supremum von X
  - $\inf X$ für das Infimum von X

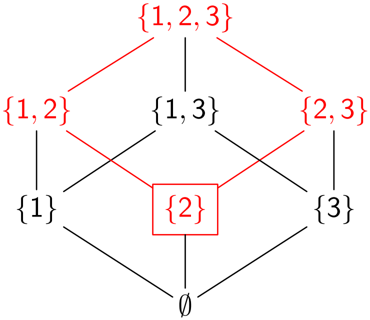
Verbände — Supremum und Infimum



Beispiele

- Supremum von $\{\{2\}\}$ ist

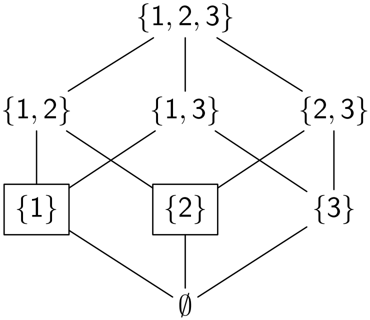
Verbände — Supremum und Infimum



Beispiele

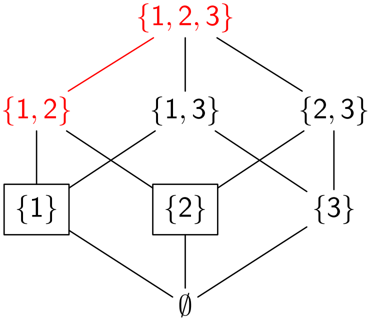
- Supremum von $\{\{2\}\}$ ist $\{2\} = \sup\{\{2\}\}$

Verbände — Supremum und Infimum



Beispiele

- Supremum von $\{\{2\}\}$ ist $\{2\} = \sup\{\{2\}\}$
- Supremum von $\{\{1\}, \{2\}\}$ ist



Beispiele

- Supremum von $\{\{2\}\}$ ist $\{2\} = \sup\{\{2\}\}$
- Supremum von $\{\{1\}, \{2\}\}$ ist $\{1, 2\} = \sup\{\{1\}, \{2\}\}$

Verbände — Supremum und Infimum

$\mathcal{P}(M)$	...	alle Teilmengen von M
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$	...	einige Teilmengen von M
$X \subseteq \mathcal{M}$	...	einige der Teilmengen aus $\mathcal{M}$
$\bigcup X = M_1 \cup M_2 \cup \cdots$	...	Vereinigung über $X = \{M_1, M_2, \dots\}$

§8.12 Theorem

Sei $(\mathcal{M}, \subseteq)$ eine teilweise geordnete Menge mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ für eine Menge M. Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathcal{M}$ mit $\bigcup X \in \mathcal{M}$ gilt $\bigcup X = \sup X$.

Verbände — Supremum und Infimum

$\mathcal{P}(M)$	$\ldots$	alle Teilmengen von M
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$	$\ldots$	einige Teilmengen von M
$X \subseteq \mathcal{M}$	$\ldots$	einige der Teilmengen aus $\mathcal{M}$
$\bigcup X = M_1 \cup M_2 \cup \cdots$	$\ldots$	Vereinigung über $X = \{M_1, M_2, \ldots\}$

§8.12 Theorem

Sei $(\mathcal{M}, \subseteq)$ eine teilweise geordnete Menge mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ für eine Menge M. Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathcal{M}$ mit $\bigcup X \in \mathcal{M}$ gilt $\bigcup X = \sup X$.

Beweis (direkt).

Wir zeigen zunächst, dass $\bigcup X$ eine obere Schranke für X ist. Sei $Y \in X$ beliebig. Dann gilt $Y \subseteq \bigcup X$, womit $\bigcup X$ obere Schranke ist.

Verbände — Supremum und Infimum

$\mathcal{P}(M)$	...	alle Teilmengen von M
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$	...	einige Teilmengen von M
$X \subseteq \mathcal{M}$	...	einige der Teilmengen aus $\mathcal{M}$
$\bigcup X = M_1 \cup M_2 \cup \cdots$	...	Vereinigung über $X = \{M_1, M_2, \dots\}$

§8.12 Theorem

Sei $(\mathcal{M}, \subseteq)$ eine teilweise geordnete Menge mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ für eine Menge M. Für jede Teilmenge $X \subseteq \mathcal{M}$ mit $\bigcup X \in \mathcal{M}$ gilt $\bigcup X = \sup X$.

Beweis (direkt).

Wir zeigen zunächst, dass $\bigcup X$ eine obere Schranke für X ist. Sei $Y \in X$ beliebig. Dann gilt $Y \subseteq \bigcup X$, womit $\bigcup X$ obere Schranke ist.

Nach §7.2 ist $\bigcup X$ die kleinste obere Schranke. Also ist $\bigcup X$ das Supremum von X. $\square$

Notation:

- wir schreiben auch $m_1 \vee m_2$ statt $\sup\{m_1, m_2\}$
- wir schreiben auch $m_1 \wedge m_2$ statt $\inf\{m_1, m_2\}$
- warum wir hier auch $\vee$ und $\wedge$ verwenden, wird gleich klar

§8.13 Definition (Verband)

Eine teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ heißt Verband gdw.
für alle $m_1, m_2 \in M$

- das Supremum von $\{m_1, m_2\}$ und $(m_1 \vee m_2)$
- das Infimum von $\{m_1, m_2\}$ $(m_1 \wedge m_2)$

existieren.

§8.13 Definition (Verband)

Eine teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ heißt Verband gdw.
für alle $m_1, m_2 \in M$

- das Supremum von $\{m_1, m_2\}$ und $(m_1 \vee m_2)$
- das Infimum von $\{m_1, m_2\}$ $(m_1 \wedge m_2)$

existieren. Weiterhin heißt $(M, \preceq)$ vollständiger Verband gdw. sogar die Suprema und Infima beliebiger Teilmengen $X \subseteq M$ existieren.

§8.13 Definition (Verband)

Eine teilweise geordnete Menge $(M, \preceq)$ heißt Verband gdw.
für alle $m_1, m_2 \in M$

- das Supremum von $\{m_1, m_2\}$ und $(m_1 \vee m_2)$
- das Infimum von $\{m_1, m_2\}$ $(m_1 \wedge m_2)$

existieren. Weiterhin heißt $(M, \preceq)$ vollständiger Verband gdw. sogar die Suprema und Infima beliebiger Teilmengen $X \subseteq M$ existieren.

Notizen:

- jeder vollständige Verband ist ein Verband
- jeder vollständige Verband $(M, \preceq)$ hat
  - das größte Element $\inf \emptyset$ in M und $(\downarrow\emptyset = M)$
  - das kleinste Element $\sup \emptyset$ in M $(\uparrow\emptyset = M)$

Beispiele

- $(\{0, 1\}, R)$ mit $R = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$
  ist ein vollständiger Verband mit
  - $\sup B = 1$ gdw. $1 \in B$ (entspricht 'oder')
  - $\inf B = 1$ gdw. $0 \notin B$ (entspricht 'und')

  größtes Element 1 und kleinstes Element 0

Beispiele

- $(\{0, 1\}, R)$ mit $R = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$
  ist ein vollständiger Verband mit
  - $\sup B = 1$ gdw. $1 \in B$ (entspricht 'oder')
  - $\inf B = 1$ gdw. $0 \notin B$ (entspricht 'und')

  größtes Element 1 und kleinstes Element 0

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ für Menge M ist vollständiger Verband mit
  - $\sup X = \bigcup X$ (siehe §8.12)
  - $\inf X = \bigcap X$ (analog zu §8.12)

  größtes Element M und kleinstes Element $\emptyset$

§8.14 Definition (Distributivität)

Ein Verband $(M, \preceq)$ ist distributiv gdw. für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$

$$m_1 \wedge (m_2 \vee m_3) = (m_1 \wedge m_2) \vee (m_1 \wedge m_3)$$
$$m_1 \vee (m_2 \wedge m_3) = (m_1 \vee m_2) \wedge (m_1 \vee m_3)$$

§8.14 Definition (Distributivität)

Ein Verband $(M, \preceq)$ ist distributiv gdw. für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$

$$m_1 \wedge (m_2 \vee m_3) = (m_1 \wedge m_2) \vee (m_1 \wedge m_3)$$
$$m_1 \vee (m_2 \wedge m_3) = (m_1 \vee m_2) \wedge (m_1 \vee m_3)$$

Beispiele

- $(\{0, 1\}, R)$ mit $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ist ein vollständiger und distributiver Verband
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ für Menge M ist ein vollständiger und distributiver Verband

§8.15 Theorem

Jede total geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein distributiver Verband

§8.15 Theorem

Jede total geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein distributiver Verband

Beweis (direkt; 1/2).

Wir müssen die Eigenschaften eines Verbandes und die Distributivität beweisen.

- Supremum: Für alle $x, y \in M$ gilt entweder $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ (Vollständigkeit). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) sei $x \preceq y$. Dann ist y obere Schranke für $\{x, y\}$.

§8.15 Theorem

Jede total geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein distributiver Verband

Beweis (direkt; 1/2).

Wir müssen die Eigenschaften eines Verbandes und die Distributivität beweisen.

- Supremum: Für alle $x, y \in M$ gilt entweder $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ (Vollständigkeit). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) sei $x \preceq y$. Dann ist y obere Schranke für $\{x, y\}$. Sei z eine beliebige obere Schranke für $\{x, y\}$. Dann gilt $y \preceq z$ und damit ist y die kleinste obere Schranke für $\{x, y\}$.

§8.15 Theorem

Jede total geordnete Menge $(M, \preceq)$ ist ein distributiver Verband

Beweis (direkt; 1/2).

Wir müssen die Eigenschaften eines Verbandes und die Distributivität beweisen.

- Supremum: Für alle $x, y \in M$ gilt entweder $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ (Vollständigkeit). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) sei $x \preceq y$. Dann ist y obere Schranke für $\{x, y\}$. Sei z eine beliebige obere Schranke für $\{x, y\}$. Dann gilt $y \preceq z$ und damit ist y die kleinste obere Schranke für $\{x, y\}$.
- Infimum: analog

Beweis (direkt; 2/2).

Wir müssen die Eigenschaften eines Verbandes und die Distributivität beweisen.

- Distributivität: Seien $x, y, z \in M$. Seien $m = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ und $m' = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Ordnung	$x \wedge (y \vee z)$	m	$x \vee (y \wedge z)$	m'
$x \preceq y \preceq z$	x	x	y	y
$x \preceq z \preceq y$	x	x	z	z
$y \preceq x \preceq z$	x	x	x	x
$y \preceq z \preceq x$	z	z	x	x
$z \preceq x \preceq y$	x	x	x	x
$z \preceq y \preceq x$	y	y	x	x

□

Notizen:

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sind distributive Verbände
  [siehe §8.15]
- aber nicht vollständig, denn $\sup \mathbb{N}$ existiert nicht

§8.16 Theorem

Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ Absorption

§8.16 Theorem

Für jeden Verband $(M, \preceq)$ und alle $x, y, z \in M$ gelten

- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ — Kommutativität
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — Assoziativität
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ — Absorption

Beweis.

(leichte Übung) $\square$

§8.17 Theorem

Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existieren $\sup X$ und $\inf X$.

§8.17 Theorem

Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existieren $\sup X$ und $\inf X$.

Beweis (Induktion über $|X|$; nur für das Supremum).

- Induktionsanfang: Sei $|X| = 1$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.

§8.17 Theorem

Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existieren $\sup X$ und $\inf X$.

Beweis (Induktion über $|X|$; nur für das Supremum).

- Induktionsanfang: Sei $|X| = 1$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - Induktionshypothese: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.

§8.17 Theorem

Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existieren $\sup X$ und $\inf X$.

Beweis (Induktion über $|X|$; nur für das Supremum).

- Induktionsanfang: Sei $|X| = 1$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - Induktionshypothese: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.
  - Induktionsbehauptung: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ existiert $\sup X$.

  Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert $y = \sup(X \setminus \{z\})$.

§8.17 Theorem

Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existieren $\sup X$ und $\inf X$.

Beweis (Induktion über $|X|$; nur für das Supremum).

- Induktionsanfang: Sei $|X| = 1$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - Induktionshypothese: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.
  - Induktionsbehauptung: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ existiert $\sup X$.

  Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert $y = \sup(X \setminus \{z\})$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$. Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$ (da $z \preceq z \vee y$ und $x \preceq y \preceq z \vee y$ für alle $x \in X \setminus \{z\}$).

§8.17 Theorem

Sei $(M, \preceq)$ ein Verband. Für jede endliche nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ existieren $\sup X$ und $\inf X$.

Beweis (Induktion über $|X|$; nur für das Supremum).

- Induktionsanfang: Sei $|X| = 1$ und $x \in X$. Dann ist $x \preceq x$ und für alle oberen Schranken z von X gilt offenbar $x \preceq z$. Also ist $x = \sup X$.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
  - Induktionshypothese: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n$ existiert $\sup X$.
  - Induktionsbehauptung: Für jedes $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ existiert $\sup X$.

  Sei $X \subseteq M$ mit $|X| = n + 1$ und $z \in X$. Gemäß Induktionshypothese existiert $y = \sup(X \setminus \{z\})$. Wir zeigen, dass $z \vee y = \sup X$. Es gilt $x \preceq z \vee y$ für alle $x \in X$ (da $z \preceq z \vee y$ und $x \preceq y \preceq z \vee y$ für alle $x \in X \setminus \{z\}$). Sei $m \in M$, so dass $x \preceq m$ für alle $x \in X$. Also auch $z \preceq m$ und $y \preceq m$. Damit allerdings auch $z \vee y \preceq m$. □

§8.18 Korollar

Jeder Verband $(M, \preceq)$ mit endlichem M ist vollständig

Zusammenfassung

- Endliche und abzählbare Mengen $\rightarrow$ diskrete Mathematik
- Supremum und Infimum
- Grundlagen Verbände
- Eigenschaften von Verbänden

Vierte Aufgabenserie bereits im AlmaWeb verfügbar