Diskrete Strukturen

Vorlesung 7: Fixpunkte & Kardinalität

27. November 2018

Nächste Termine — Modul “Diskrete Strukturen”

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
26.11.	27.11. Fixpunkte + Kardinalitäten (3. Abgabe + 4. Übungsblatt)
3.12. **dies academicus** 4. Übungswoche	4.12. Kardinalitäten
10.12. Hörsaalübung	11.12. Verbände (4. Abgabe + 5. Übungsblatt)
17.12. Hörsaalübung 5. Übungswoche	18.12. Boolesche Algebren
24.12.	25.12.
31.12.	1.1.

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
7.1.	8.1. Körper (5. Abgabe + 6. Übungsblatt)
14.1. Hörsaalübung 6. Übungswoche	15.1. Graphen und Bäume
21.1.	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe + 7. Übungsblatt)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik
11.2.	12.2.

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Fixpunkte von Funktionen
- Einführung Kardinalität von Mengen
- Grundwissen über Kardinalitäten

Bitte Fragen direkt stellen!

Motivation:

- Iteration ein wesentliches Prinzip der Programmierung
- Fixpunkte mathematische Variante von Iteration

Funktionen — Fixpunkte

Motivation:

- Iteration ein wesentliches Prinzip der Programmierung
- Fixpunkte mathematische Variante von Iteration

§7.1 Definition (Fixpunkt)

Sei $f: M \to M$ eine Funktion auf M.
Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Funktionen — Fixpunkte

Motivation:

- Iteration ein wesentliches Prinzip der Programmierung
- Fixpunkte mathematische Variante von Iteration

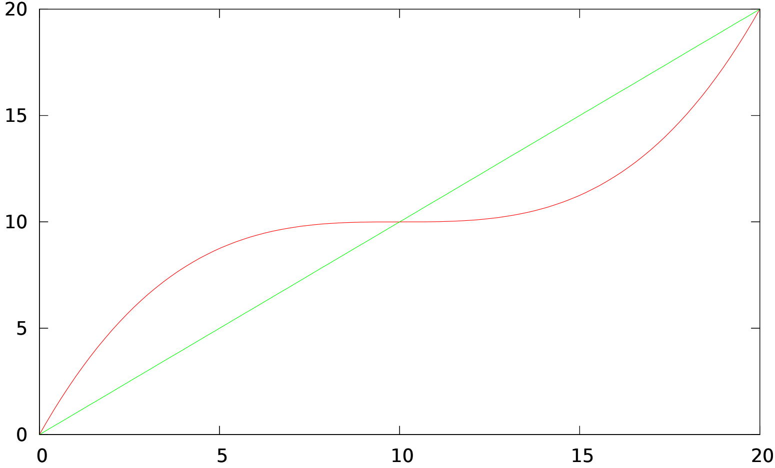
§7.1 Definition (Fixpunkt)

Sei $f : M \to M$ eine Funktion auf M.
Ein Fixpunkt von f ist ein Element $m \in M$, so dass $f(m) = m$.

Beispiele

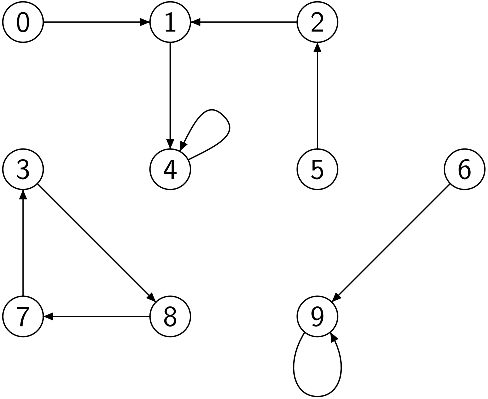
- nachfolger : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ hat keine Fixpunkte
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  hat Fixpunkte 0, 1 und 2

Funktionen — Fixpunkte

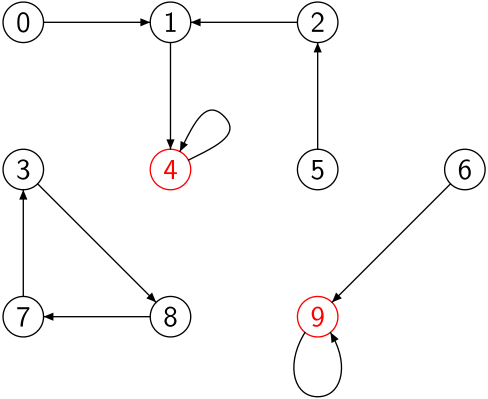


Fixpunkte = Schnittpunkte mit Diagonale $y = x$

Funktionen — Fixpunkte



(Fixpunkte haben Schleifen)



(Fixpunkte haben Schleifen)

§7.2 Theorem

Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ für eine Menge M.
Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Teilmenge und

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(M) \mid U \text{ ist obere Schranke für } \mathcal{X}\}$$

die Menge aller oberen Schranken für $\mathcal{X}$.
Dann gilt $\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ ($\bigcup \mathcal{X}$ ist kleinste obere Schranke)

§7.2 Theorem

Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ für eine Menge M.
Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Teilmenge und

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(M) \mid U \text{ ist obere Schranke für } \mathcal{X}\}$$

die Menge aller oberen Schranken für $\mathcal{X}$.
Dann gilt $\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ ($\bigcup \mathcal{X}$ ist kleinste obere Schranke)

Beweis (direkt).

Sei $U \in \mathcal{U}$ eine obere Schranke für $\mathcal{X}$ und sei $m \in \bigcup \mathcal{X}$ beliebig.
Nach §4.1 existiert $N \in \mathcal{X}$, so dass $m \in N$.

§7.2 Theorem

Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ für eine Menge M.
Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Teilmenge und

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(M) \mid U \text{ ist obere Schranke für } \mathcal{X}\}$$

die Menge aller oberen Schranken für $\mathcal{X}$.
Dann gilt $\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ ($\bigcup \mathcal{X}$ ist kleinste obere Schranke)

Beweis (direkt).

Sei $U \in \mathcal{U}$ eine obere Schranke für $\mathcal{X}$ und sei $m \in \bigcup \mathcal{X}$ beliebig.
Nach §4.1 existiert $N \in \mathcal{X}$, so dass $m \in N$.

Da U obere Schranke für $\mathcal{X}$ ist und $N \in \mathcal{X}$, gilt $N \subseteq U$.

§7.2 Theorem

Wir betrachten die teilweise geordnete Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ für eine Menge M.
Sei $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Teilmenge und

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(M) \mid U \text{ ist obere Schranke für } \mathcal{X}\}$$

die Menge aller oberen Schranken für $\mathcal{X}$.
Dann gilt $\bigcup \mathcal{X} \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ ($\bigcup \mathcal{X}$ ist kleinste obere Schranke)

Beweis (direkt).

Sei $U \in \mathcal{U}$ eine obere Schranke für $\mathcal{X}$ und sei $m \in \bigcup \mathcal{X}$ beliebig.
Nach §4.1 existiert $N \in \mathcal{X}$, so dass $m \in N$.

Da U obere Schranke für $\mathcal{X}$ ist und $N \in \mathcal{X}$, gilt $N \subseteq U$.
Da $N \subseteq U$ und $m \in N$ folgt $m \in U$. □

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis (direkt).

Seien $P = \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$ und $N = \bigcup P$. Für jede Teilmenge $X \in P$ gilt offensichtlich $X \subseteq N$.

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis (direkt).

Seien $P = \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$ und $N = \bigcup P$. Für jede Teilmenge $X \in P$ gilt offensichtlich $X \subseteq N$. Nach Annahme gilt also $f(X) \subseteq f(N)$ und damit

$$X \subseteq f(X) \subseteq f(N) \quad ,$$

womit $f(N)$ eine obere Schranke von P ist.

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis (direkt).

Seien $P = \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$ und $N = \bigcup P$. Für jede Teilmenge $X \in P$ gilt offensichtlich $X \subseteq N$. Nach Annahme gilt also $f(X) \subseteq f(N)$ und damit

$$X \subseteq f(X) \subseteq f(N) \quad ,$$

womit $f(N)$ eine obere Schranke von P ist.

Nach §7.2 ist $N = \bigcup P \subseteq f(N)$, denn $f(N)$ ist eine obere Schranke von P.

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis (direkt).

Seien $P = \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$ und $N = \bigcup P$. Für jede Teilmenge $X \in P$ gilt offensichtlich $X \subseteq N$. Nach Annahme gilt also $f(X) \subseteq f(N)$ und damit

$$X \subseteq f(X) \subseteq f(N) \quad ,$$

womit $f(N)$ eine obere Schranke von P ist.

Nach §7.2 ist $N = \bigcup P \subseteq f(N)$, denn $f(N)$ ist eine obere Schranke von P.
Also auch $f(N) \subseteq f(f(N))$ nach Annahme, wodurch $f(N) \in P$.

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis (direkt).

Seien $P = \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$ und $N = \bigcup P$. Für jede Teilmenge $X \in P$ gilt offensichtlich $X \subseteq N$. Nach Annahme gilt also $f(X) \subseteq f(N)$ und damit

$$X \subseteq f(X) \subseteq f(N) \quad ,$$

womit $f(N)$ eine obere Schranke von P ist.

Nach §7.2 ist $N = \bigcup P \subseteq f(N)$, denn $f(N)$ ist eine obere Schranke von P. Also auch $f(N) \subseteq f(f(N))$ nach Annahme, wodurch $f(N) \in P$. Demzufolge gilt auch $f(N) \subseteq \bigcup P = N$

§7.3 Theorem (Knaster-Tarski Lemma)

Sei $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(X) \subseteq f(Y)$ für alle $X \subseteq Y \subseteq M$.
Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis (direkt).

Seien $P = \{X \in \mathcal{P}(M) \mid X \subseteq f(X)\}$ und $N = \bigcup P$. Für jede Teilmenge $X \in P$ gilt offensichtlich $X \subseteq N$. Nach Annahme gilt also $f(X) \subseteq f(N)$ und damit

$$X \subseteq f(X) \subseteq f(N) \quad ,$$

womit $f(N)$ eine obere Schranke von P ist.

Nach §7.2 ist $N = \bigcup P \subseteq f(N)$, denn $f(N)$ ist eine obere Schranke von P. Also auch $f(N) \subseteq f(f(N))$ nach Annahme, wodurch $f(N) \in P$. Demzufolge gilt auch $f(N) \subseteq \bigcup P = N$ und zusammen mit $N \subseteq f(N)$ erhalten wir $N = f(N)$ und damit den Fixpunkt N. $\square$

Bronisław Knaster (* 1893; † 1980)

- poln. Mathematiker
- Topologie und faires Kuchenschneiden
- Doktorand von Stefan Mazurkiewicz

© Konrad Jacobs

Bronisław Knaster (* 1893; † 1980)

- poln. Mathematiker
- Topologie und faires Kuchenschneiden
- Doktorand von Stefan Mazurkiewicz

© Konrad Jacobs

Alfred Tarski (* 1901; † 1983)

- poln.-amerik. Logiker und Mathematiker
- Modelltheorie und algebraische Logik
- Fixpunktsätze

© George M. Bergman

Funktionen — Fixpunkte

Beispiele

- nachfolger : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - hat keine Fixpunkte
  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt nachfolger$(X) = X$?

Funktionen — Fixpunkte

Beispiele

- nachfolger : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - hat keine Fixpunkte
  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt nachfolger$(X) = X$?

für $X = \emptyset$

Beispiele

- nachfolger : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - hat keine Fixpunkte
  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt nachfolger$(X) = X$?

für $X = \emptyset$

- sei nachfolger$'$: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so dass für alle $X \subseteq \mathbb{N}$

$$\text{nachfolger}'(X) = X \cup \text{nachfolger}(X)$$

  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt nachfolger$'(X) = X$?

Funktionen — Fixpunkte

Beispiele

- nachfolger : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - hat keine Fixpunkte
  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt nachfolger(X) $= X$?

    für $X = \emptyset$

- sei nachfolger$'$: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so dass für alle $X \subseteq \mathbb{N}$

  $$\text{nachfolger}'(X) = X \cup \text{nachfolger}(X)$$

  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt nachfolger$'$(X) $= X$?

    für $X \in \{\emptyset, \mathbb{N}\}$

Beispiele

- nachfolger : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - hat keine Fixpunkte
  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $\text{nachfolger}(X) = X$?

für $X = \emptyset$

- sei nachfolger$'$: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, so dass für alle $X \subseteq \mathbb{N}$

$$\text{nachfolger}'(X) = X \cup \text{nachfolger}(X)$$

  - für welche Teilmengen $X \subseteq \mathbb{N}$ gilt $\text{nachfolger}'(X) = X$?

für $X \in \{\emptyset, \mathbb{N}\}$

für $X_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$

§7.4 Theorem

Sei $f\colon M \to N$ und $X \subseteq Y \subseteq M$

1. $f(X) \subseteq f(Y)$
2. $M \setminus Y \subseteq M \setminus X$
3. $M \setminus (M \setminus X) = X$

§7.4 Theorem

Sei $f\colon M \to N$ und $X \subseteq Y \subseteq M$

1. $f(X) \subseteq f(Y)$
2. $M \setminus Y \subseteq M \setminus X$
3. $M \setminus (M \setminus X) = X$

Beweis (direkt).

1. Sei $n \in f(X)$. Dann existiert $m \in X$, so dass $f(m) = n$. Da $X \subseteq Y$ gilt auch $m \in Y$ und damit $n \in f(Y)$.

§7.4 Theorem

Sei $f\colon M \to N$ und $X \subseteq Y \subseteq M$

1. $f(X) \subseteq f(Y)$
2. $M \setminus Y \subseteq M \setminus X$
3. $M \setminus (M \setminus X) = X$

Beweis (direkt).

1. Sei $n \in f(X)$. Dann existiert $m \in X$, so dass $f(m) = n$. Da $X \subseteq Y$ gilt auch $m \in Y$ und damit $n \in f(Y)$.
2. Sei $m \in M \setminus Y$. Dann ist $m \in M$, aber $m \notin Y$. Da $m \notin Y$ gilt auch $m \notin X$ (Kontraposition von $X \subseteq Y$) und somit $m \in M \setminus X$.

§7.4 Theorem

Sei $f\colon M \to N$ und $X \subseteq Y \subseteq M$

1. $f(X) \subseteq f(Y)$
2. $M \setminus Y \subseteq M \setminus X$
3. $M \setminus (M \setminus X) = X$

Beweis (direkt).

1. Sei $n \in f(X)$. Dann existiert $m \in X$, so dass $f(m) = n$. Da $X \subseteq Y$ gilt auch $m \in Y$ und damit $n \in f(Y)$.
2. Sei $m \in M \setminus Y$. Dann ist $m \in M$, aber $m \notin Y$. Da $m \notin Y$ gilt auch $m \notin X$ (Kontraposition von $X \subseteq Y$) und somit $m \in M \setminus X$.
3. Wir formen um

$$\begin{aligned} M \setminus (M \setminus X) &= M \cap (M \cap X^c)^c = M \cap (M^c \cup X) \\ &= (M \cap M^c) \cup (M \cap X) = M \cap X = X \end{aligned}$$

$\square$

§7.5 Theorem (Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem)

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen.
Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

§7.5 Theorem (Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem)

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen.
Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis (direkt; 1/3).

Wir definieren $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $h(X) = M \setminus g\bigl(N \setminus f(X)\bigr)$ für alle $X \subseteq M$. Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gelten vermittels §7.4 ❶ und ❷

$$f(X) \subseteq f(Y) \quad N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X) \quad g\bigl(N \setminus f(Y)\bigr) \subseteq g\bigl(N \setminus f(X)\bigr)$$

und damit $h(X) \subseteq h(Y)$.

§7.5 Theorem (Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem)

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen.
Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis (direkt; 1/3).

Wir definieren $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $h(X) = M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big)$ für alle $X \subseteq M$. Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gelten vermittels §7.4 ❶ und ❷

$$f(X) \subseteq f(Y) \qquad N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X) \qquad g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big)$$

und damit $h(X) \subseteq h(Y)$. Also existiert Fixpunkt $F \subseteq M$ (d.h. $h(F) = F$) nach §7.3 und

$$M \setminus F = M \setminus h(F) = M \setminus \Big(M \setminus g\big(N \setminus f(F)\big)\Big) = g\big(N \setminus f(F)\big)$$

nach §7.4 ❸.

§7.5 Theorem (Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem)

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ injektive Funktionen.
Dann existiert eine bijektive Funktion $B\colon M \to N$.

Beweis (direkt; 1/3).

Wir definieren $h\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ mit $h(X) = M \setminus g\big(N \setminus f(X)\big)$ für alle $X \subseteq M$. Für alle $X \subseteq Y \subseteq M$ gelten vermittels §7.4 ❶ und ❷

$$f(X) \subseteq f(Y) \qquad N \setminus f(Y) \subseteq N \setminus f(X) \qquad g\big(N \setminus f(Y)\big) \subseteq g\big(N \setminus f(X)\big)$$

und damit $h(X) \subseteq h(Y)$. Also existiert Fixpunkt $F \subseteq M$ (d.h. $h(F) = F$) nach §7.3 und

$$M \setminus F = M \setminus h(F) = M \setminus \Big(M \setminus g\big(N \setminus f(F)\big)\Big) = g\big(N \setminus f(F)\big)$$

nach §7.4 ❸. Wir definieren die Relation $B \subseteq M \times N$

$$B = \{(m,n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m,n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

Beweis (direkt; 2/3).

z.zg. B ist die gewünschte Bijektion:

- def. für jedes $m \in M$: Falls $m \in F$, dann gilt $(m, f(m)) \in B$. Sonst ist $m \in M \setminus F = g(N \setminus f(F))$, also existiert $n \in N \setminus f(F)$, so dass $g(n) = m$, und damit $(m, n) \in B$.

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$$

Beweis (direkt; 2/3).

z.zg. B ist die gewünschte Bijektion:

- def. für jedes $m \in M$: Falls $m \in F$, dann gilt $(m, f(m)) \in B$. Sonst ist $m \in M \setminus F = g(N \setminus f(F))$, also existiert $n \in N \setminus f(F)$, so dass $g(n) = m$, und damit $(m, n) \in B$.
- Eindeutigkeit: Seien $(m, x) \in B$ und $(m, y) \in B$. Falls $m \in F$, dann gilt $x = f(m) = y$.

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$$

Beweis (direkt; 2/3).

z.zg. B ist die gewünschte Bijektion:

- def. für jedes $m \in M$: Falls $m \in F$, dann gilt $(m, f(m)) \in B$. Sonst ist $m \in M \setminus F = g(N \setminus f(F))$, also existiert $n \in N \setminus f(F)$, so dass $g(n) = m$, und damit $(m, n) \in B$.
- Eindeutigkeit: Seien $(m, x) \in B$ und $(m, y) \in B$. Falls $m \in F$, dann gilt $x = f(m) = y$. Andernfalls gilt $g(x) = m = g(y)$ und aufgrund der (Kontraposition der) Injektivität von g gilt auch dann $x = y$.

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$$

Beweis (direkt; 2/3).

z.zg. B ist die gewünschte Bijektion:

- def. für jedes $m \in M$: Falls $m \in F$, dann gilt $(m, f(m)) \in B$. Sonst ist $m \in M \setminus F = g(N \setminus f(F))$, also existiert $n \in N \setminus f(F)$, so dass $g(n) = m$, und damit $(m, n) \in B$.
- Eindeutigkeit: Seien $(m, x) \in B$ und $(m, y) \in B$. Falls $m \in F$, dann gilt $x = f(m) = y$. Andernfalls gilt $g(x) = m = g(y)$ und aufgrund der (Kontraposition der) Injektivität von g gilt auch dann $x = y$.

$\rightarrow$ B ist eine Funktion

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g(N \setminus f(F))$$

Beweis (direkt; 3/3).

- surjektiv: Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$.

Beweis (direkt; 3/3).

- surjektiv: Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst $n \in N \setminus f(F)$ und damit $g(n) \in g(N \setminus f(F)) = M \setminus F$. Also ist $B(g(n)) = n$.

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g\big(N \setminus f(F)\big)$$

Beweis (direkt; 3/3).

- surjektiv: Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst $n \in N \setminus f(F)$ und damit $g(n) \in g(N \setminus f(F)) = M \setminus F$. Also ist $B(g(n)) = n$.
- injektiv: (Kontrapos.) Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$. Z.zg. $x = y$.
  - Sei $B(x) \in f(F)$. Existiert $m \in \{x, y\}$ mit $m \in M \setminus F$, dann existiert auch $n \in N \setminus f(F)$ mit $g(n) = m$ da $M \setminus F = g(N \setminus f(F))$. Damit gilt $B(m) = n \in N \setminus f(F)$, was jedoch $B(m) = B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt jedoch auch $x \neq y$, da f injektiv ist.

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g(N \setminus f(F))$$

Beweis (direkt; 3/3).

- surjektiv: Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst $n \in N \setminus f(F)$ und damit $g(n) \in g(N \setminus f(F)) = M \setminus F$. Also ist $B(g(n)) = n$.
- injektiv: (Kontrapos.) Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$. Z.zg. $x = y$.
  - Sei $B(x) \in f(F)$. Existiert $m \in \{x, y\}$ mit $m \in M \setminus F$, dann existiert auch $n \in N \setminus f(F)$ mit $g(n) = m$ da $M \setminus F = g(N \setminus f(F))$. Damit gilt $B(m) = n \in N \setminus f(F)$, was jedoch $B(m) = B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt jedoch auch $x \neq y$, da f injektiv ist.
  - Sei $B(x) \notin f(F)$. Dann $x, y \in M \setminus F$. Also gilt $x = g(B(x)) = g(B(y)) = y$.

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g(N \setminus f(F))$$

Beweis (direkt; 3/3).

- surjektiv: Sei $n \in N$. Falls $n \in f(F)$, dann existiert $m \in F$, so dass $f(m) = n$. Damit gilt $B(m) = n$. Sonst $n \in N \setminus f(F)$ und damit $g(n) \in g(N \setminus f(F)) = M \setminus F$. Also ist $B(g(n)) = n$.
- injektiv: (Kontrapos.) Seien $x, y \in M$ mit $B(x) = B(y)$. Z.zg. $x = y$.
  - Sei $B(x) \in f(F)$. Existiert $m \in \{x, y\}$ mit $m \in M \setminus F$, dann existiert auch $n \in N \setminus f(F)$ mit $g(n) = m$ da $M \setminus F = g(N \setminus f(F))$. Damit gilt $B(m) = n \in N \setminus f(F)$, was jedoch $B(m) = B(x) \in f(F)$ widerspricht. Also gilt $x, y \in F$. Damit gilt jedoch auch $x \neq y$, da f injektiv ist.
  - Sei $B(x) \notin f(F)$. Dann $x, y \in M \setminus F$. Also gilt $x = g(B(x)) = g(B(y)) = y$.

$\rightarrow$ B ist eine bijektive Funktion □

$$B = \{(m, n) \in f \mid m \in F\} \cup \{(m, n) \in g^{-1} \mid m \in M \setminus F\}$$

$$M \setminus F = g(N \setminus f(F))$$

Ernst Schröder (* 1841; † 1902)

- dtsch. Mathematiker
- algebraische Logik
- Verfechter der formalen Logik

Ernst Schröder (* 1841; † 1902)

- dtsch. Mathematiker
- algebraische Logik
- Verfechter der formalen Logik

Felix Bernstein (* 1878; † 1956)

- dtsch. Mathematiker
- Grundlagen der Mengenlehre
- Doktorand von Cantor
- Blutgruppenvererbung

Motivation:

- bisher intuitive Größe von Mengen
  (Anzahl der Elemente oder '$\geq \infty$' für unendliche Mengen)

$\rightarrow$ höchst ungenau, da $|\mathbb{N}| \geq \infty \leq |\mathbb{R}|$

Motivation:

- bisher intuitive Größe von Mengen
  (Anzahl der Elemente oder '$\geq \infty$' für unendliche Mengen)

$\rightarrow$ höchst ungenau, da $|\mathbb{N}| \geq \infty \leq |\mathbb{R}|$

- es gibt sogar unendlich viele "Unendlichkeiten"
- aber die Kardinalitäten (Mächtigkeiten) sind total geordnet
  (nutzt Auswahlaxiom)

§7.6 Definition (gleichmächtig)

Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert

§7.6 Definition (gleichmächtig)

Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$, gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert

Beispiele

- $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nichtleeren Mengen M

§7.6 Definition (gleichmächtig)

Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$,
gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert

Beispiele

- $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nichtleeren Mengen M
- $|\{1, 2, 3\}| = |\{6, 9, 11\}|$ via $\{(1, 6), (2, 9), (3, 11)\}$

§7.6 Definition (gleichmächtig)

Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, kurz $|M| = |N|$,
gdw. eine bijektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert

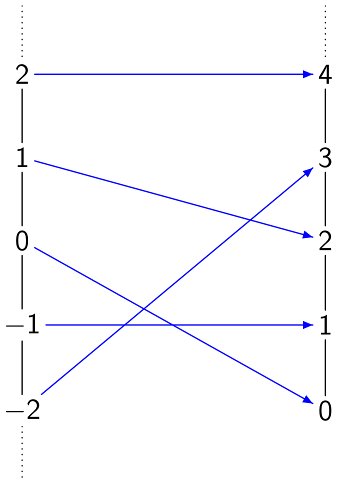
Beispiele

- $|\emptyset| \neq |M|$ für alle nichtleeren Mengen M
- $|\{1, 2, 3\}| = |\{6, 9, 11\}|$ via $\{(1,6), (2,9), (3,11)\}$
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ vermittels $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$; für alle $z \in \mathbb{Z}$ (Übung)

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -(2z+1) & \text{sonst} \end{cases}$$

($\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig)

Funktionen — Kardinalität



Notizen:

- Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation $\rightarrow$ Übung
- ihre Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten

(auch: Mächtigkeiten oder Kardinalzahlen)

Notizen:

- Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation $\rightarrow$ Übung
- ihre Äquivalenzklassen heißen Kardinalitäten
  (auch: Mächtigkeiten oder Kardinalzahlen)
- die Kardinalitäten endlicher Mengen
  entsprechen den nat. Zahlen
- die Kardinalitäten unendlicher Mengen erkunden wir gleich

Exkurs:

- Gleichmächtigkeit $\overset{|\cdot|}{=} = \{(M, N) \mid |M| = |N|\}$ ist eine Äquivalenzrelation

$\rightarrow$ $\overset{|\cdot|}{=}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ für eine Menge $\mathcal{M}$

Exkurs:

- Gleichmächtigkeit $\overset{|\cdot|}{=} = \{(M, N) \mid |M| = |N|\}$ ist eine Äquivalenzrelation

$\rightarrow$ $\overset{|\cdot|}{=}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ für eine Menge $\mathcal{M}$

- Was ist $\mathcal{M}$?

Funktionen — Kardinalität

Exkurs:

- Gleichmächtigkeit $\overset{|\cdot|}{=} = \{(M, N) \mid |M| = |N|\}$
  ist eine Äquivalenzrelation

$\rightarrow$ $\overset{|\cdot|}{=}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ für eine Menge $\mathcal{M}$

- Was ist $\mathcal{M}$?
- da wir beliebige Mengen vergleichen möchten,
  müsste dies die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen sein

Exkurs:

- Gleichmächtigkeit $\overset{|\cdot|}{=} = \{(M, N) \mid |M| = |N|\}$ ist eine Äquivalenzrelation

$\rightarrow$ $\overset{|\cdot|}{=}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ für eine Menge $\mathcal{M}$

- Was ist $\mathcal{M}$?
- da wir beliebige Mengen vergleichen möchten, müsste dies die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen sein

§7.7 Problem (siehe §3.2)

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen ist nicht wohldefiniert.

- für jede Menge M gilt entweder $M \in \mathcal{M}$ oder $M \notin \mathcal{M}$

Exkurs:

- Gleichmächtigkeit $\overset{|\cdot|}{=} = \{(M, N) \mid |M| = |N|\}$
  ist eine Äquivalenzrelation

$\rightarrow$ $\overset{|\cdot|}{=}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ für eine Menge $\mathcal{M}$

- Was ist $\mathcal{M}$?
- da wir beliebige Mengen vergleichen möchten,
  müsste dies die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen sein

§7.7 Problem (siehe §3.2)

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen ist nicht wohldefiniert.

- für jede Menge M gilt entweder $M \in \mathcal{M}$ oder $M \notin \mathcal{M}$
- Sei $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$. Dann gilt unsinnigerweise $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}$,
  denn jede Menge ist verschieden von ihren Elementen (siehe §3.2)

Funktionen — Kardinalität

Exkurs:

- Gleichmächtigkeit $\overset{|\cdot|}{=} = \{(M, N) \mid |M| = |N|\}$ ist eine Äquivalenzrelation

$\rightarrow$ $\overset{|\cdot|}{=}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ für eine Menge $\mathcal{M}$

- Was ist $\mathcal{M}$?
- da wir beliebige Mengen vergleichen möchten, müsste dies die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen sein

§7.7 Problem (siehe §3.2)

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen ist nicht wohldefiniert.

- für jede Menge M gilt entweder $M \in \mathcal{M}$ oder $M \notin \mathcal{M}$
- Sei $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$. Dann gilt unsinnigerweise $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}$, denn jede Menge ist verschieden von ihren Elementen (siehe §3.2)
- Sei $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{M}$ nicht die Menge aller Mengen, denn sie enthält nicht die Menge $\mathcal{M}$

Naive Mengenlehre:

- Problem §7.7 zeigt Grenze unserer naiven Mengenlehre auf
- $\stackrel{|\cdot|}{=}$ hat die wesentlichen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

Naive Mengenlehre:

- Problem §7.7 zeigt Grenze unserer naiven Mengenlehre auf
- $\overset{|\cdot|}{=}$ hat die wesentlichen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation
- aber keine geeignete Grundmenge

Naive Mengenlehre:

- Problem §7.7 zeigt Grenze unserer naiven Mengenlehre auf
- $\stackrel{|\cdot|}{=}$ hat die wesentlichen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation
- aber keine geeignete Grundmenge
- wir ignorieren dies allerdings im Folgenden

(genauer in der axiomatischen Mengenlehre)

§7.8 Theorem

$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$ ($\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig)

§7.8 Theorem

$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$ ($\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig)

Beweis (direkt).

Nach §7.5 (Cantor-Schröder-Bernstein) reicht die Angabe zweier injektiver Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Sei $g(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Dann ist g offensichtlich injektiv (aber nicht surjektiv).

§7.8 Theorem

$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$ ($\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig)

Beweis (direkt).

Nach §7.5 (Cantor-Schröder-Bernstein) reicht die Angabe zweier injektiver Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Sei $g(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Dann ist g offensichtlich injektiv (aber nicht surjektiv).

Wir konstruieren $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ für alle teilerfremden $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\ell}(m_i \cdot 10^{2i+1} + n_i \cdot 10^{2i}) & \text{falls } m \geq 0 \\ -\sum_{i=0}^{\ell}(m_i \cdot 10^{2i+1} + n_i \cdot 10^{2i}) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $m_0, \dots, m_\ell, n_0, \dots, n_\ell \in \{0, \dots, 9\}$ und

$$m = \sum_{i=0}^{\ell} m_i \cdot 10^i \qquad \text{und} \qquad n = \sum_{i=0}^{\ell} n_i \cdot 10^i \;.$$

Dies ist ebenso injektiv, da m und n direkt aus $f(\frac{m}{n})$ ablesbar sind. $\square$

Illustration:

- $[m_\ell m_{\ell-1} \cdots m_1 m_0]_{10}$ ist die Dezimaldarstellung von $|m|$
  z.B. für $m = 4.906$ erhalten wir $m_3 = 4$, $m_2 = 9$, $m_1 = 0$ und $m_0 = 6$
- $[n_\ell n_{\ell-1} \cdots n_1 n_0]_{10}$ ist die Dezimaldarstellung von n
  z.B. für $n = 331$ erhalten wir $n_3 = 0$, $n_2 = 3$, $n_1 = 3$ und $n_0 = 1$
- dann ist $|f(\frac{m}{n})| = [m_\ell n_\ell m_{\ell-1} n_{\ell-1} \cdots m_1 n_1 m_0 n_0]_{10}$
  z.B. für $m = 4.906$ und $n = 331$ ist $f(\frac{m}{n}) = 40.930.361$
- damit ist klar, dass $m = x$ und $n = y$ aus $f(\frac{m}{n}) = f(\frac{x}{y})$ folgt
  (Kontraposition Injektivität)

§7.9 Theorem

$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ ($\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig)

§7.9 Theorem

$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ ($\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig)

Beweis (indirekt).

Sei $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $d_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$\begin{array}{rcccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

§7.9 Theorem

$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ ($\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig)

Beweis (indirekt).

Sei $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Dann existiert eine bijektive Funktion $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Schreibe Bilder als Dezimalzahlen mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $d_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$\begin{array}{rccccccccc}
b(0) = & a_0 & , & d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} & \cdots \\
b(1) = & a_1 & , & d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
b(2) = & a_2 & , & d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b(n) = & a_n & , & d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, wähle $d_i \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{d_{ii}\}$. Da b surjektiv ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $b(n) = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots$. Es gilt $d_n = d_{nn} \neq d_{nn}$. Widerspruch! □

Funktionen — Kardinalität

Motivation

- man möchte evtl. Funktionen oder Relationen
  über Äquivalenzklassen definieren

  (z.B. Ordnung der Kardinalitäten)

- dies macht man oft mit Hilfe der Repräsentanten

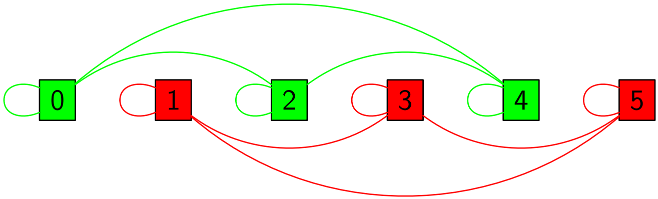
Motivation

- man möchte evtl. Funktionen oder Relationen über Äquivalenzklassen definieren

  (z.B. Ordnung der Kardinalitäten)

- dies macht man oft mit Hilfe der Repräsentanten

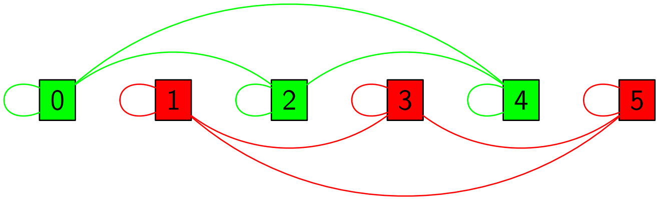
$\rightarrow$ dabei muss man allerdings die Wohldefiniertheit nachweisen



Beispiele

Sei $\equiv$ obige Äquivalenzrelation

1. $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert,
   denn $[1] \prec [2]$ aber $[1] \not\prec [0] = [2]$
   Definition ist nicht unabhängig vom Repräsentanten



Beispiele

Sei $\equiv$ obige Äquivalenzrelation

1. $[i] \prec [j]$ gdw. $i < j$ ist nicht wohldefiniert,
   denn $[1] \prec [2]$ aber $[1] \not\prec [0] = [2]$
   Definition ist nicht unabhängig vom Repräsentanten
2. $[i] \prec [j]$ gdw. ungerade Zahl $z \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $i = j + z$
   ist wohldefiniert, denn unabhängig vom Repräsentanten (→ Übung)

§7.10 Definition (Ordnung der Kardinalitäten)

Die Menge N ist mächtiger als die Menge M, kurz $|M| \leq |N|$,
(genauer: die Kardinalität von N ist größer als die von M)
gdw. eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.

§7.10 Definition (Ordnung der Kardinalitäten)

Die Menge N ist mächtiger als die Menge M, kurz $|M| \leq |N|$,
(genauer: die Kardinalität von N ist größer als die von M)
gdw. eine injektive Funktion $f: M \to N$ existiert.

§7.11 Unabhängigkeit vom Repräsentanten

Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$.
Es existiert eine injektive Funktion $f: M \to N$ (womit $|M| \leq |N|$)
gdw. eine injektive Funktion $g: X \to Y$ existiert (womit $|X| \leq |Y|$).

§7.10 Definition (Ordnung der Kardinalitäten)

Die Menge N ist mächtiger als die Menge M, kurz $|M| \leq |N|$,
(genauer: die Kardinalität von N ist größer als die von M)
gdw. eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.

§7.11 Unabhängigkeit vom Repräsentanten

Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$.
Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ (womit $|M| \leq |N|$)
gdw. eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$ existiert (womit $|X| \leq |Y|$).

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme existieren $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$ bijektiv. Dann ist $(b\,;f\,;c)\colon X \to Y$ injektiv nach §5.14.

§7.10 Definition (Ordnung der Kardinalitäten)

Die Menge N ist mächtiger als die Menge M, kurz $|M| \leq |N|$,
(genauer: die Kardinalität von N ist größer als die von M)
gdw. eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ existiert.

§7.11 Unabhängigkeit vom Repräsentanten

Seien M, X, N, Y Mengen, so dass $|M| = |X|$ und $|N| = |Y|$.
Es existiert eine injektive Funktion $f\colon M \to N$ (womit $|M| \leq |N|$)
gdw. eine injektive Funktion $g\colon X \to Y$ existiert (womit $|X| \leq |Y|$).

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\to$) Sei $f\colon M \to N$ injektiv. Aufgrund der Annahme existieren $b\colon X \to M$ und $c\colon N \to Y$ bijektiv. Dann ist $(b\,;f\,;c)\colon X \to Y$ injektiv nach §5.14.

($\leftarrow$) analog $\square$

Beispiele

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\mathrm{id} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{id}(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiele

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\mathrm{id}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{id}(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $|\emptyset| \leq |\mathbb{N}|$ vermittels $\emptyset$

Beispiele

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\mathrm{id} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{id}(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $|\emptyset| \leq |\mathbb{N}|$ vermittels $\emptyset$
- $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$ vermittels $f = \{(1, 4), (2, 2)\}$

Beispiele

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\mathrm{id} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{id}(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $|\emptyset| \leq |\mathbb{N}|$ vermittels $\emptyset$
- $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$ vermittels $f = \{(1, 4), (2, 2)\}$

§7.12 Theorem

Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$.

Beispiele

- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$ vermittels $\mathrm{id} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{id}(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $|\emptyset| \leq |\mathbb{N}|$ vermittels $\emptyset$
- $|\{1, 2\}| \leq |\{2, 3, 4\}|$ vermittels $f = \{(1, 4), (2, 2)\}$

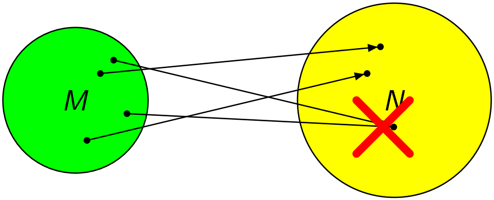
§7.12 Theorem

Sei $M \subseteq N$. Dann gilt $|M| \leq |N|$.

Beweis (direkt).

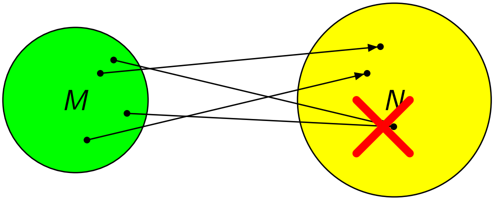
Sei $\mathrm{id} \colon M \to N$, so dass $\mathrm{id}(m) = m$ für alle $m \in M$.
Offensichtlich ist 'id' injektiv. $\square$

f nicht injektiv:



Notiz:
für injektive Funktion $f : M \rightarrow N$ muss es für jedes Element aus M ein eigenes Element $f(m)$ in N geben

f nicht injektiv:



Notiz:

für injektive Funktion $f: M \to N$ muss es für jedes Element aus M ein eigenes Element $f(m)$ in N geben

$\to$ es gibt "mehr" Elemente in N

§7.13 Theorem (nutzt Auswahlaxiom)

Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann gilt $|N| \leq |M|$.

§7.13 Theorem (nutzt Auswahlaxiom)

Sei $f\colon M \to N$ surjektiv. Dann gilt $|N| \le |M|$.

Beweis (direkt).

Da f surjektiv ist, existiert gemäß §6.4 eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g\,;f = \mathrm{id}_N$. Wir zeigen per Kontraposition, dass g injektiv ist. Seien also $x, y \in N$ mit $g(x) = g(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{id}_N(x) = (g\,;f)(x) = f(g(x)) \\ &= f(g(y)) = (g\,;f)(y) = \mathrm{id}_N(y) = y \end{aligned}$$

§7.13 Theorem (nutzt Auswahlaxiom)

Sei $f: M \to N$ surjektiv. Dann gilt $|N| \leq |M|$.

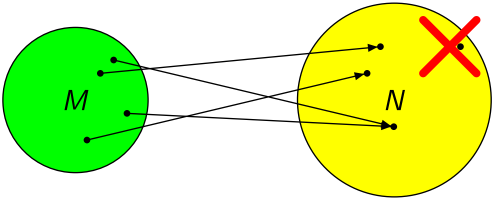
Beweis (direkt).

Da f surjektiv ist, existiert gemäß §6.4 eine Funktion $g: N \to M$, so dass $g\,;f = \mathrm{id}_N$. Wir zeigen per Kontraposition, dass g injektiv ist. Seien also $x, y \in N$ mit $g(x) = g(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x = \mathrm{id}_N(x) &= (g\,;f)(x) = f(g(x)) \\ &= f(g(y)) = (g\,;f)(y) = \mathrm{id}_N(y) = y \end{aligned}$$

Da g injektiv ist, gilt $|N| \leq |M|$. $\square$

f nicht surjektiv:



Notiz:
für surjektive Funktion $f : M \to N$ muss für jedes Element aus N ein eigenes Element $m \in M$ mit $f(m) = n$ existieren

$\to$ es gibt "mehr" Elemente in M, falls Auswahlaxiom gilt

Zusammenfassung

- Fixpunkte von Funktionen
- Fixpunktsatz für $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$
- Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem
- Kardinalität von Mengen

Vierte Aufgabenserie bereits im AlmaWeb verfügbar