Diskrete Strukturen

Vorlesung 6: Funktionen und Auswahlaxiom

20. November 2018

Nächste Termine — Modul "Diskrete Strukturen"

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
19.11. Hörsaalübung 3. Übungsw. (Feiertag 21.11.)	20.11. Auswahlaxiom
26.11.	27.11. Ordnungsrelationen (3. Abgabe + 4. Übungsblatt)
3.12. **dies academicus** 4. Übungswoche	4.12. Kardinalitäten
10.12. Hörsaalübung	11.12. Verbände (4. Abgabe + 5. Übungsblatt)
17.12. Hörsaalübung 5. Übungswoche	18.12. Boolesche Algebren
24.12.	25.12.
31.12.	1.1.

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
7.1.	8.1. Körper (5. Abgabe + 6. Übungsblatt)
14.1. Hörsaalübung 6. Übungswoche	15.1. Graphen und Bäume
21.1.	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe + 7. Übungsblatt)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik
11.2.	12.2.
18.2. Prüfungswoche	19.2. Prüfung am 22.2.

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen
2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Invertierung von Funktionen
- Auswahlaxiom und Begriff: Axiom
- Ordnungsrelationen
- Spezielle Elemente in Ordnungen

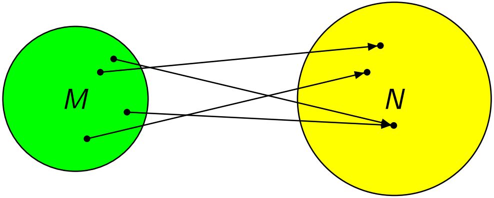
Bitte Fragen direkt stellen!

Motivation:

- manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können
- z.B. Verschlüsselung, Kompression, ...

$\rightarrow$ invertierbare Funktionen

Nicht invertierbar:



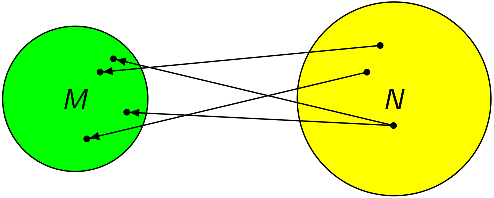
Funktionen — Eigenschaften

Motivation:

- manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können
- z.B. Verschlüsselung, Kompression, ...

$\rightarrow$ invertierbare Funktionen

Nicht invertierbar:



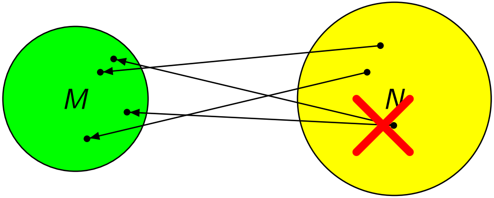
Funktionen — Eigenschaften

Motivation:

- manchmal möchte man eine Funktionsanwendung rückgängig machen können
- z.B. Verschlüsselung, Kompression, ...

$\rightarrow$ invertierbare Funktionen

Nicht invertierbar:



§6.1 Definition (invertierbar)

Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw.
eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f\,;g = \mathrm{id}_M \qquad \text{und} \qquad g\,;f = \mathrm{id}_N$$

§6.1 Definition (invertierbar)

Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw.
eine Funktion $g\colon N \to M$ existiert, so dass

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M \qquad \text{und} \qquad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$$

Beispiele

- id_M ist offensichtlich invertierbar (vermittels id_M)
- verdoppeln ist nicht invertierbar

  Welchen Wert soll die inverse Funktion 3 zuweisen?
- f mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ ist nicht invertierbar

  Welchen Wert soll die inverse Funktion 2 zuweisen?

§6.2 Theorem

Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar gdw. sie bijektiv ist

§6.2 Theorem

Eine Funktion $f: M \to N$ ist invertierbar gdw. sie bijektiv ist

Beweis (beidseitige Implikationen; 1/2).

($\to$) Sei f invertierbar, d.h. es existiert $g: N \to M$, so dass $f\,;\,g = \mathrm{id}_M$ und $g\,;\,f = \mathrm{id}_N$.

- Injektivität per Kontraposition: Seien $x, y \in M$, so dass $f(x) = f(y)$. Z.zg. $x = y$.

§6.2 Theorem

Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. sie bijektiv ist

Beweis (beidseitige Implikationen; 1/2).

($\to$) Sei f invertierbar, d.h. es existiert $g\colon N \to M$, so dass $f\,;g = \mathrm{id}_M$ und $g\,;f = \mathrm{id}_N$.

- Injektivität per Kontraposition: Seien $x, y \in M$, so dass $f(x) = f(y)$. Z.zg. $x = y$. Es gilt

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{id}_M(x) = (f\,;g)(x) = g(f(x)) \\ &= g(f(y)) = (f\,;g)(y) = \mathrm{id}_M(y) = y \end{aligned}$$

§6.2 Theorem

Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist invertierbar gdw. sie bijektiv ist

Beweis (beidseitige Implikationen; 1/2).

($\rightarrow$) Sei f invertierbar, d.h. es existiert $g\colon N \to M$, so dass $f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M$ und $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$.

- Injektivität per Kontraposition: Seien $x, y \in M$, so dass $f(x) = f(y)$. Z.zg. $x = y$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{id}_M(x) = (f \mathbin{;} g)(x) = g(f(x)) \\
&= g(f(y)) = (f \mathbin{;} g)(y) = \mathrm{id}_M(y) = y
\end{aligned}
$$

- Surjektivität: Sei $n \in N$ beliebig. Dann ist $f(g(n)) = (g \mathbin{;} f)(n) = \mathrm{id}_N(n) = n$. Also existiert nach §5.9 ein $m \in M$, so dass $g(n) = m$ und $f(m) = n$.

Beweis (beidseitige Implikationen; 2/2).

($\leftarrow$) Sei f bijektiv. Wir definieren die Relation $g \subseteq N \times M$ durch $g = f^{-1}$.

Beweis (beidseitige Implikationen; 2/2).

($\leftarrow$) Sei f bijektiv. Wir definieren die Relation $g \subseteq N \times M$ durch $g = f^{-1}$. Zunächst zeigen wir, dass g eine Funktion ist.

- Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $(n, m) \in g$.

Beweis (beidseitige Implikationen; 2/2).

($\leftarrow$) Sei f bijektiv. Wir definieren die Relation $g \subseteq N \times M$ durch $g = f^{-1}$. Zunächst zeigen wir, dass g eine Funktion ist.

- Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $(n, m) \in g$.
- Seien $(n, x) \in g$ und $(n, y) \in g$. Folglich gilt $f(x) = n = f(y)$ und gemäß der Kontraposition der Injektivität von f folgt $x = y$.

Beweis (beidseitige Implikationen; 2/2).

($\leftarrow$) Sei f bijektiv. Wir definieren die Relation $g \subseteq N \times M$ durch $g = f^{-1}$. Zunächst zeigen wir, dass g eine Funktion ist.

- Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $(n, m) \in g$.
- Seien $(n, x) \in g$ und $(n, y) \in g$. Folglich gilt $f(x) = n = f(y)$ und gemäß der Kontraposition der Injektivität von f folgt $x = y$.

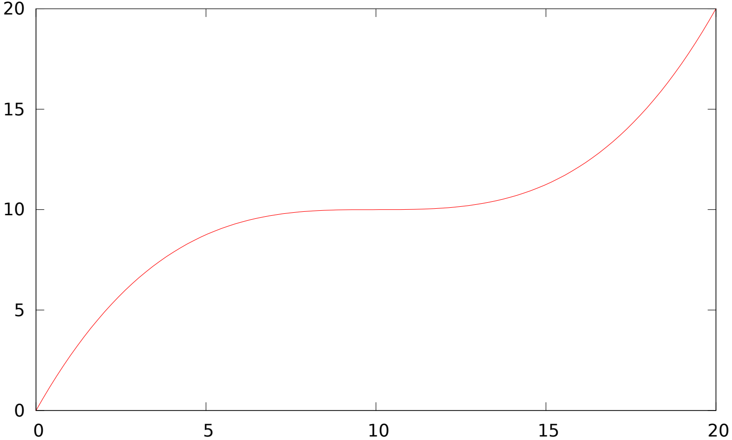
Z.zg. $f \,;\, g = \mathrm{id}_M$ und $g \,;\, f = \mathrm{id}_N$. Für jedes $m \in M$ und $n \in N$ gelten

$$(f \,;\, g)(m) = f^{-1}(f(m)) = m \quad \text{und}$$
$$(g \,;\, f)(n) = f(f^{-1}(n)) = n$$

denn $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$ und $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ [§5.16]. □

Notizen:

- jede Verschlüsselungsfunktion f ist invertierbar
- aber die Berechnung einer inversen Funktion g ist “schwierig”

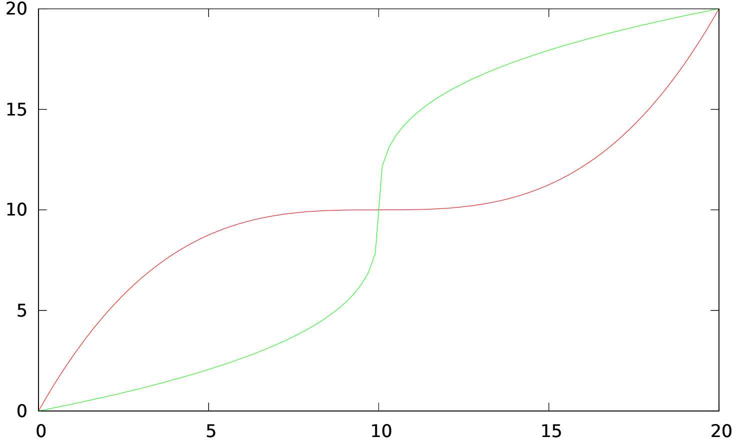


(Spiegelung an Diagonale $y = x$)

Funktionen — Eigenschaften

Notizen:

- jede Verschlüsselungsfunktion f ist invertierbar
- aber die Berechnung einer inversen Funktion g ist "schwierig"



(Spiegelung an Diagonale $y = x$)

§6.3 Theorem

Sei $f \colon M \to N$ und seien $g, g' \colon N \to M$ mit

$$f \mathbin{;} g = \mathrm{id}_M \qquad g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$$
$$f \mathbin{;} g' = \mathrm{id}_M \qquad g' \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$$

Dann gilt $g = g'$ (Eindeutigkeit des Inversen)

§6.3 Theorem

Sei $f \colon M \to N$ und seien $g, g' \colon N \to M$ mit

$$f \,;\, g = \mathrm{id}_M \qquad\qquad g \,;\, f = \mathrm{id}_N$$
$$f \,;\, g' = \mathrm{id}_M \qquad\qquad g' \,;\, f = \mathrm{id}_N$$

Dann gilt $g = g'$ (Eindeutigkeit des Inversen)

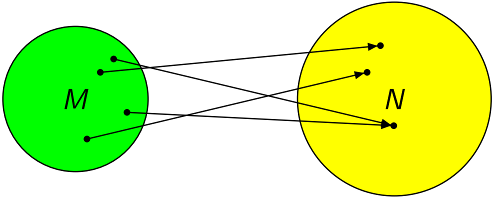
Beweis (direkt).

$$\begin{aligned} g &= g \,;\, \mathrm{id}_M = g \,;\, (f \,;\, g') \\ &= (g \,;\, f) \,;\, g' = \mathrm{id}_N \,;\, g' = g' \end{aligned}$$

wobei wir die Assoziativität der Komposition (§5.14) nutzen. □

Motivation:

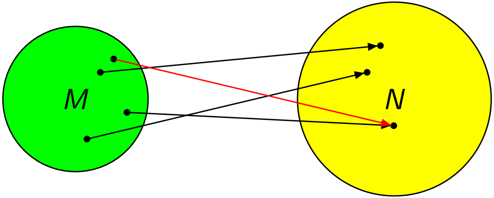
- betrachten wir §6.2 noch einmal ohne injektiv
  (abgeschwächte Aussage; nur eine Richtung)
- passen Beweis entsprechend an



Motivation:

- betrachten wir §6.2 noch einmal ohne injektiv

  (abgeschwächte Aussage; nur eine Richtung)
- passen Beweis entsprechend an



§6.4 Theorem

Wenn eine Funktion $f : M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g : N \to M$, so dass $g \,;\, f = \mathrm{id}_N$

§6.4 Theorem

Wenn eine Funktion $f\colon M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$

Beweis (direkt).

Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$. Für jedes $n \in N$ wähle ein $m_n \in f^{-1}(\{n\})$.

§6.4 Theorem

Wenn eine Funktion $f : M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g \colon N \to M$, so dass $g \,;\, f = \mathrm{id}_N$

Beweis (direkt).

Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$. Für jedes $n \in N$ wähle ein $m_n \in f^{-1}(\{n\})$.

Wir definieren die Funktion $g \colon N \to M$ durch $g(n) = m_n$.
Z.zg. $g \,;\, f = \mathrm{id}_N$. Für alle $n \in N$ gilt

$$(g \,;\, f)(n) = f(g(n)) = f(m_n) = n = \mathrm{id}_N(n)$$

denn $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ nach §5.16. $\square$

§6.4 Theorem [nutzt Auswahlaxiom]

Wenn eine Funktion $f\colon M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$

Beweis (direkt).

Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$. Für jedes $n \in N$ wähle ein $m_n \in f^{-1}(\{n\})$.

Wir definieren die Funktion $g\colon N \to M$ durch $g(n) = m_n$.
Z.zg. $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$. Für alle $n \in N$ gilt

$$(g \mathbin{;} f)(n) = f(g(n)) = f(m_n) = n = \mathrm{id}_N(n)$$

denn $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ nach §5.16. $\square$

Illustration der nichtleeren Mengen $f^{-1}(\{n\})$:

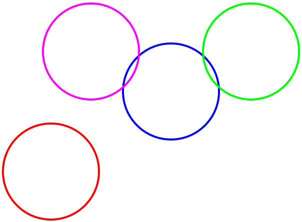
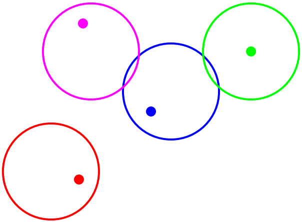


Illustration der nichtleeren Mengen $f^{-1}(\{n\})$ mit Auswahl:



Notizen:

- diese offenbar einfache Auswahl ist nicht trivial
- ist aber allg. akzeptiert in der Mathematik
- Nutzung aber bitte kennzeichnen

Notizen:

- diese offenbar einfache Auswahl ist nicht trivial
- ist aber allg. akzeptiert in der Mathematik
- Nutzung aber bitte kennzeichnen

§6.5 Axiom (Auswahlaxiom; Zermelo 1904)

Für jede Menge $\mathcal{X}$ von nichtleeren Mengen gibt es eine Funktion $c \colon \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$, so dass $c(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{X}$

Notizen:

- diese offenbar einfache Auswahl ist nicht trivial
- ist aber allg. akzeptiert in der Mathematik
- Nutzung aber bitte kennzeichnen

§6.5 Axiom (Auswahlaxiom; Zermelo 1904)

Für jede Menge $\mathcal{X}$ von nichtleeren Mengen gibt es eine Funktion $c\colon \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$, so dass $c(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{X}$

Ernst Zermelo (* 1871; † 1953)

- dtsch. Logiker und Mathematiker
- Begründer der axiomatischen Mengenlehre
- Schach hat eine endliche Lösung

© Konrad Jacobs

Theorem (§6.4 jetzt nochmal mit Auswahlaxiom)

Wenn eine Funktion $f : M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g \colon N \to M$, so dass $g \,; f = \mathrm{id}_N$

Theorem (§6.4 jetzt nochmal mit Auswahlaxiom)

Wenn eine Funktion $f\colon M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$

Beweis (direkt).

Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$.

Funktionen — Auswahlaxiom

Theorem (§6.4 jetzt nochmal mit Auswahlaxiom)

Wenn eine Funktion $f : M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g \colon N \to M$, so dass $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$

Beweis (direkt).

Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{M} = \{f^{-1}(\{n\}) \mid n \in N\}$. Offensichtlich $\emptyset \notin \mathcal{M}$ und $\bigcup \mathcal{M} = M$. Aufgrund des Auswahlaxioms existiert eine Funktion $c \colon \mathcal{M} \to M$, so dass $c(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{M}$.

Theorem (§6.4 jetzt nochmal mit Auswahlaxiom)

Wenn eine Funktion $f\colon M \to N$ surjektiv ist, dann existiert eine Funktion $g\colon N \to M$, so dass $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$

Beweis (direkt).

Sei $n \in N$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $m \in M$ mit $f(m) = n$. Also $f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{M} = \{f^{-1}(\{n\}) \mid n \in N\}$. Offensichtlich $\emptyset \notin \mathcal{M}$ und $\bigcup \mathcal{M} = M$. Aufgrund des Auswahlaxioms existiert eine Funktion $c\colon \mathcal{M} \to M$, so dass $c(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{M}$.

Wir definieren die Funktion $g\colon N \to M$ durch $g(n) = c(f^{-1}(\{n\}))$ für alle $n \in N$. Z.zg. $g \mathbin{;} f = \mathrm{id}_N$. Für alle $n \in N$ gilt

$$(g \mathbin{;} f)(n) = f(g(n)) = f\big(c(f^{-1}(\{n\}))\big) = n = \mathrm{id}_N(n)$$

denn $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ nach §5.16. $\square$

Funktionen — Auswahlaxiom

Notizen:

- AC = Auswahlaxiom *(axiom of choice)*
- Axiom ist eine Grundannahme (unbewiesen)

Notizen:

- AC = Auswahlaxiom *(axiom of choice)*
- Axiom ist eine Grundannahme (unbewiesen)
- man kann AC also annehmen oder eben nicht

§6.6 Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind ein System (N, s, z), so dass

1. $z \in N$ und $s \colon N \to N$ injektiv

§6.6 Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind ein System (N, s, z), so dass

1. $z \in N$ und $s\colon N \to N$ injektiv
2. $z \notin s(N)$

§6.6 Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind ein System (N, s, z), so dass

1. $z \in N$ und $s\colon N \to N$ injektiv
2. $z \notin s(N)$
3. jede Teilmenge $E \subseteq N$, so dass
   - $z \in E$ und
   - $n \in E \to s(n) \in E$ für alle $n \in N$

   gelten, erfüllt $E = N$

§6.6 Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

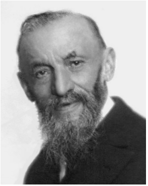
Die natürlichen Zahlen sind ein System (N, s, z), so dass

1. $z \in N$ und $s\colon N \to N$ injektiv
2. $z \notin s(N)$
3. jede Teilmenge $E \subseteq N$, so dass
   - $z \in E$ und
   - $n \in E \to s(n) \in E$ für alle $n \in N$

   gelten, erfüllt $E = N$

Guiseppe Peano (* 1858; † 1932)

- ital. Mathematiker und Logiker
- Begründer der axiomatischen Mengenlehre
- Formalisierung der vollständigen Induktion



Beispiel zu §6.6

Das System $(\mathbb{N}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt die Peano-Axiome:

1. $0 \in \mathbb{N}$ und $\text{nachfolger} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv ✓

   ($n \neq n'$ impliziert $n + 1 \neq n' + 1$)

Beispiel zu §6.6

Das System $(\mathbb{N}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt die Peano-Axiome:

1. $0 \in \mathbb{N}$ und $\text{nachfolger} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv ✓

   ($n \neq n'$ impliziert $n + 1 \neq n' + 1$)

2. $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{N})$ ✓

   ($0 \neq n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$)

Beispiel zu §6.6

Das System $(\mathbb{N}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt die Peano-Axiome:

1. $0 \in \mathbb{N}$ und $\text{nachfolger}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv ✓

   ($n \neq n'$ impliziert $n + 1 \neq n' + 1$)

2. $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{N})$ ✓

   ($0 \neq n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$)

3. jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{N}$, so dass
   - $0 \in E$ und
   - $n \in E \to (n + 1) \in E$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   gelten, erfüllt $E = \mathbb{N}$ ✓

   (Prinzip der vollständigen Induktion)

Fragen zu §6.6:
Erfüllt das System $(\mathbb{Z}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome?

1. Gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und ist $\text{nachfolger}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv?

Fragen zu §6.6:
Erfüllt das System $(\mathbb{Z}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome?

1. Gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und ist $\text{nachfolger} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv? ✓
   ($z \neq z'$ impliziert $z + 1 \neq z' + 1$)

Funktionen — Axiome

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{Z}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome?

1. Gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und ist $\text{nachfolger}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv? ✓

   ($z \neq z'$ impliziert $z + 1 \neq z' + 1$)

2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{Z})$?

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{Z}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome? ✗

1. Gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und ist $\text{nachfolger}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv? ✓

   ($z \neq z'$ impliziert $z + 1 \neq z' + 1$)

2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{Z})$? ✗

   (da $-1 + 1 = 0$)

Fragen zu §6.6:
Erfüllt das System $(\mathbb{Z}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome? ✗

1. Gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und ist $\text{nachfolger}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv? ✓
   ($z \neq z'$ impliziert $z + 1 \neq z' + 1$)
2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{Z})$? ✗
   (da $-1 + 1 = 0$)
3. Gilt $E = \mathbb{Z}$ für jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{Z}$, so dass
   - $0 \in E$ und
   - $z \in E \to (z + 1) \in E$ für alle $z \in \mathbb{Z}$?

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{Z}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome? ✗

1. Gilt $0 \in \mathbb{Z}$ und ist $\text{nachfolger}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv? ✓

   ($z \neq z'$ impliziert $z + 1 \neq z' + 1$)

2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{Z})$? ✗

   (da $-1 + 1 = 0$)

3. Gilt $E = \mathbb{Z}$ für jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{Z}$, so dass
   - $0 \in E$ und
   - $z \in E \to (z + 1) \in E$ für alle $z \in \mathbb{Z}$?

   ✗

   (z.B. für $E = \mathbb{N}$)

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(r) = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Peano-Axiome

1. Gilt $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist $\text{nachfolger} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ injektiv?

Fragen zu §6.6:
Erfüllt das System $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(r) = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Peano-Axiome

1. Gilt $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist $\text{nachfolger} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ injektiv? ✓
   ($r \neq r'$ impliziert $r + 1 \neq r' + 1$)

Fragen zu §6.6:
Erfüllt das System $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(r) = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Peano-Axiome

1. Gilt $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist $\text{nachfolger}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ injektiv? ✓
   ($r \neq r'$ impliziert $r + 1 \neq r' + 1$)
2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{R}_{\geq 0})$?

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(r) = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Peano-Axiome

1. Gilt $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist $\text{nachfolger} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ injektiv? ✓

   ($r \neq r'$ impliziert $r + 1 \neq r' + 1$)

2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{R}_{\geq 0})$? ✓

   (da $r + 1 \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(r) = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Peano-Axiome

1. Gilt $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist $\text{nachfolger} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ injektiv? ✓
   ($r \neq r'$ impliziert $r + 1 \neq r' + 1$)
2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{R}_{\geq 0})$? ✓
   (da $r + 1 \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)
3. Gilt $E = \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass
   - $0 \in E$ und
   - $r \in E \to (r + 1) \in E$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Fragen zu §6.6:

Erfüllt das System $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{nachfolger}, 0)$ mit $\text{nachfolger}(r) = r + 1$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Peano-Axiome ✗

1. Gilt $0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist $\text{nachfolger} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ injektiv? ✓

   ($r \neq r'$ impliziert $r + 1 \neq r' + 1$)

2. Gilt $0 \notin \text{nachfolger}(\mathbb{R}_{\geq 0})$? ✓

   (da $r + 1 \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)

3. Gilt $E = \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass
   - $0 \in E$ und
   - $r \in E \to (r + 1) \in E$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

   ✗

   (z.B. für $E = \mathbb{N}$)

Funktionen — Axiome

Notizen:

- auch für die Mengenlehre gibt es Axiome
- Klassiker:
  - Zermelo-Fraenkel (ZF)
  - Zermelo-Fraenkel mit Auswahlaxiom (ZFC)
- basierend auf diesen Axiomen und der Logik
  kann man die klassische Theorie der nat. Zahlen entwickeln

Abraham Fraenkel (* 1891; † 1965)

- dtsch.-isra. Mathematiker und Logiker
- Begründer der axiomatischen Mengenlehre
- ergänzte das Auswahlaxiom

Relation R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to (x, x) \in R)$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to (x, x) \notin R)$

Wiederholung — Eigenschaften von Relationen

Relation R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x, x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x, x))$

Relation R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big((x,y) \in R \to (y,x) \in R\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big((x,y) \in R \land (y,x) \in R\big) \to x = y\Big)$

Relation R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x,y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x,y\Big(\big(R(x,y) \land R(y,x)\big) \to x = y\Big)$

Relation R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \to x = y\Big)$
- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\big) \to (x,z) \in R\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x, y\big((x \in M \wedge y \in M) \to \big((x,y) \in R \vee (y,x) \in R\big)\big)$

Relation R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x,y) \land R(y,x)\big) \to x = y\Big)$
- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big(R(x,y) \land R(y,z)\big) \to R(x,z)\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x, y((x \in M \land y \in M) \to \big(R(x,y) \lor R(y,x)\big)$

§6.7 Definition (Ordnungsrelation)

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation
gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

§6.7 Definition (Ordnungsrelation)

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation
gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $\forall x(x \in M \rightarrow x \preceq x)$ reflexiv
- $\forall x, y\big((x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow x = y\big)$ antisymmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \preceq y \wedge y \preceq z) \rightarrow x \preceq z\big)$ transitiv

§6.7 Definition (Ordnungsrelation)

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation
gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $\forall x(x \in M \rightarrow x \preceq x)$ reflexiv
- $\forall x, y\big((x \preceq y \land y \preceq x) \rightarrow x = y\big)$ antisymmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \preceq y \land y \preceq z) \rightarrow x \preceq z\big)$ transitiv

Das Paar $(M, \preceq)$ heißt dann teilweise geordnete Menge.

§6.7 Definition (Ordnungsrelation)

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation
gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $\forall x(x \in M \to x \preceq x)$ reflexiv
- $\forall x, y\big((x \preceq y \land y \preceq x) \to x = y\big)$ antisymmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \preceq y \land y \preceq z) \to x \preceq z\big)$ transitiv

Das Paar $(M, \preceq)$ heißt dann teilweise geordnete Menge.
Ist $\preceq$ vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge.

§6.7 Definition (Ordnungsrelation)

Eine Relation $\preceq$ auf M ist eine Ordnungsrelation
gdw. sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- $\forall x(x \in M \to x \preceq x)$ reflexiv
- $\forall x, y\big((x \preceq y \land y \preceq x) \to x = y\big)$ antisymmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \preceq y \land y \preceq z) \to x \preceq z\big)$ transitiv

Das Paar $(M, \preceq)$ heißt dann teilweise geordnete Menge.
Ist $\preceq$ vollständig, dann heißt $(M, \preceq)$ auch total geordnete Menge.

- $\forall x, y\big((x \in M \land y \in M) \to (x \preceq y \lor y \preceq x)\big)$ vollständig

Beispiele

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ist eine Ordnungsrelation, aber nicht vollständig
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation

Beispiele

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ist eine Ordnungsrelation, aber nicht vollständig
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation
3. $| = \{(n, n') \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid n \text{ teilt } n'\}$ ist eine Ordnungsrelation
   wobei $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beispiele

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ist eine Ordnungsrelation, aber nicht vollständig
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation
3. $| = \{(n, n') \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid n \text{ teilt } n'\}$ ist eine Ordnungsrelation wobei $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweis zu 3 (direkt).

- reflexiv: für alle $x \in \mathbb{N}_+$ teilt x sich selbst, also $x \mid x$.

Beispiele

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ist eine Ordnungsrelation, aber nicht vollständig
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation
3. $| = \{(n, n') \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid n \text{ teilt } n'\}$ ist eine Ordnungsrelation wobei $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweis zu 3 (direkt).

- reflexiv: für alle $x \in \mathbb{N}_+$ teilt x sich selbst, also $x \mid x$.
- antisymmetrisch: Seien $x \mid y$ und $y \mid x$. Dann gilt $x \leq y$ und $y \leq x$, womit $x = y$ folgt (Antisymmetrie von $\leq$).

Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ist eine Ordnungsrelation, aber nicht vollständig
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation
3. $\mid\, = \{(n, n') \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid n \text{ teilt } n'\}$ ist eine Ordnungsrelation wobei $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweis zu 3 (direkt).

- reflexiv: für alle $x \in \mathbb{N}_+$ teilt x sich selbst, also $x \mid x$.
- antisymmetrisch: Seien $x \mid y$ und $y \mid x$. Dann gilt $x \leq y$ und $y \leq x$, womit $x = y$ folgt (Antisymmetrie von $\leq$).
- transitiv: Seien $x \mid y$ und $y \mid z$. D.h. es existieren $k, n \in \mathbb{N}_+$, so dass $kx = y$ und $ny = z$. Also

$$z = ny = n(kx) = (nk)x \quad ,$$

womit auch $x \mid z$ gilt. □

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓	✗	✗

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\ = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓	✗	✗

Alternative Bezeichnungen:

- partiell geordnet = teilweise geordnet
- Kette = linear geordnete Menge = total geordnete Menge

Alternative Bezeichnungen:

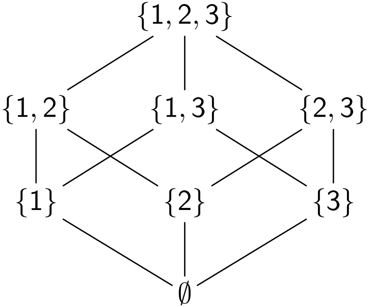
- partiell geordnet = teilweise geordnet
- Kette = linear geordnete Menge = total geordnete Menge

Hasse-Diagramm:

- grafische Darstellung endlicher teilweise geordneter Mengen
- alle Kanten sind per Konvention nach oben gerichtet
- Kanten aus id_M (Schleifen) nicht dargestellt
- Kanten, die sich vermittels Transitivität aus anderen Kanten ergeben, werden nicht dargestellt

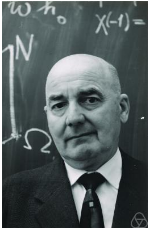
Relationen — Ordnungsrelationen

Hasse-Diagram für $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$



Helmut Hasse (* 1898; † 1979)

- dtsch. Mathematiker
- Algebra und algebraische Zahlentheorie
- unterschrieb "Bekenntnis der deutschen Professoren zu Adolf Hitler"

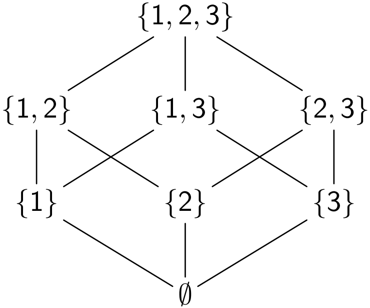


§6.8 Definition (Teilkette)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge. Eine Teilmenge $X \subseteq M$ ist eine Teilkette von $(M, \preceq)$ gdw. $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ für alle $x, y \in X$.

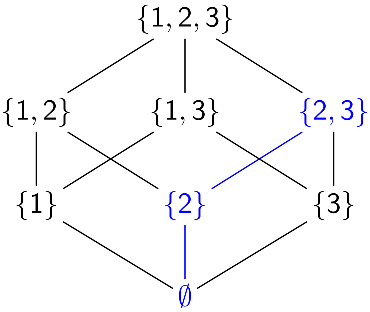
(alternativ: $(X, \preceq \cap (X \times X))$ ist total geordnet)

Relationen — Ordnungsrelationen



Beispiele

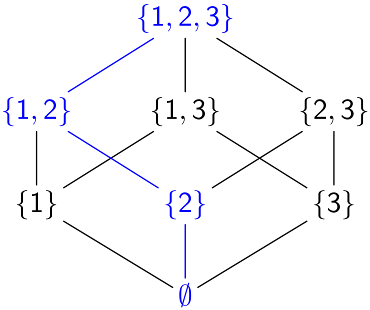
- $\mathbb{N}$ ist eine Teilkette von $(\mathbb{Z}, \leq)$



Beispiele

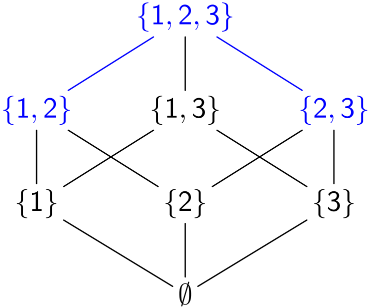
- $\mathbb{N}$ ist eine Teilkette von $(\mathbb{Z}, \leq)$
- $\{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}\}$ ist eine Teilkette von $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Relationen — Ordnungsrelationen



Beispiele

- $\mathbb{N}$ ist eine Teilkette von $(\mathbb{Z}, \leq)$
- $\{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}\}$ ist eine Teilkette von $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$
- $\{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist eine Teilkette von $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$



Beispiele

- $\mathbb{N}$ ist eine Teilkette von $(\mathbb{Z}, \leq)$
- $\{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}\}$ ist eine Teilkette von $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$
- $\{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist eine Teilkette von $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$
- $\{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}\}$ ist keine Teilkette von $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

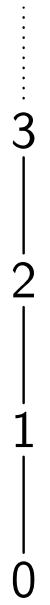
§6.9 Definition (maximale und minimale Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge. Ein Element $x \in M$ ist

- maximal gdw. $x \not\preceq m$ für alle $m \in M$ mit $m \neq x$
  (es gibt keine echt größeren Elemente)
- minimal gdw. $m \not\preceq x$ für alle $m \in M$ mit $m \neq x$
  (es gibt keine echt kleineren Elemente)

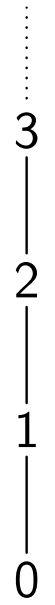
Beispiele

- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente:
  - minimale Elemente:



Beispiele

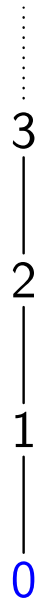
- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente:



Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

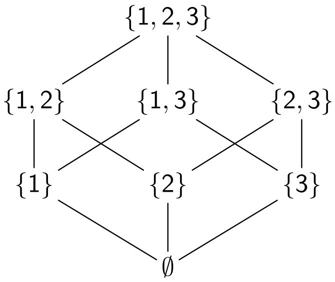
- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0



Relationen — Ordnungsrelationen

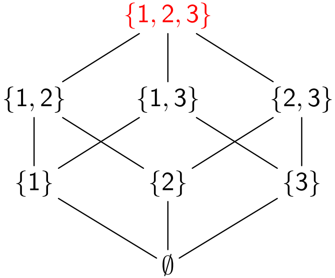
Beispiele

- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ haben wir
  - maximale Elemente:
  - minimale Elemente:



Beispiele

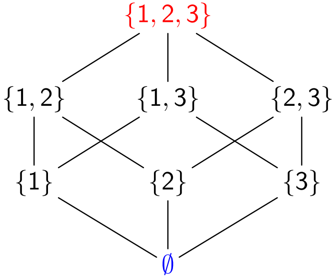
- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ haben wir
  - maximale Elemente: $\{1, 2, 3\}$
  - minimale Elemente:



Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

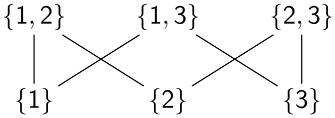
- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ haben wir
  - maximale Elemente: $\{1, 2, 3\}$
  - minimale Elemente: $\emptyset$



Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

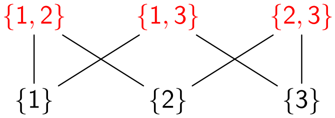
- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ haben wir
  - maximale Elemente: $\{1, 2, 3\}$
  - minimale Elemente: $\emptyset$
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$
  - maximale Elemente:
  - minimale Elemente:



Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

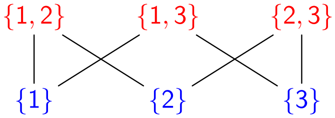
- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ haben wir
  - maximale Elemente: $\{1, 2, 3\}$
  - minimale Elemente: $\emptyset$
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$
  - maximale Elemente:
    $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$
  - minimale Elemente:



Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

- in $(\mathbb{N}, \leq)$ haben wir
  - maximale Elemente: keine
  - minimale Elemente: 0
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ haben wir
  - maximale Elemente: $\{1, 2, 3\}$
  - minimale Elemente: $\emptyset$
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$
  - maximale Elemente: $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$
  - minimale Elemente: $\{1\}$ und $\{2\}$ und $\{3\}$



§6.10 Definition (obere Schranke und größte Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$
  (größer als alle Elemente aus X)

§6.10 Definition (obere Schranke und größte Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$

  (größer als alle Elemente aus X)

- das größte Element von X gdw.
  $m \in X$ und m obere Schranke für X ist

  (obere Schranke von X, die in X liegt)

§6.10 Definition (obere Schranke und größte Elemente)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge und $X \subseteq M$.
Ein Element $m \in M$ ist

- eine obere Schranke für X gdw. $x \preceq m$ für alle $\underline{x \in X}$

  (größer als alle Elemente aus X)

- das größte Element von X gdw.
  $m \in X$ und m obere Schranke für X ist

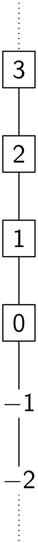
  (obere Schranke von X, die in X liegt)

- untere Schranken und kleinstes Element analog

Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

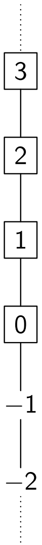
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken:
  - größtes Element:



Relationen — Ordnungsrelationen

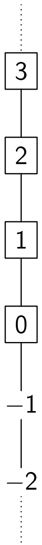
Beispiele

- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element:



Beispiele

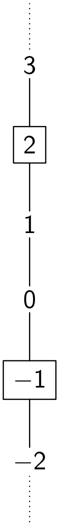
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins



Relationen — Ordnungsrelationen

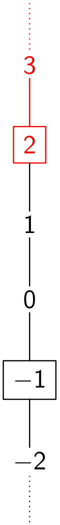
Beispiele

- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\{-1, 2\}$
  - obere Schranken:
  - größtes Element:



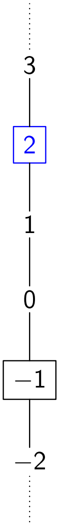
Beispiele

- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\{-1, 2\}$
  - obere Schranken: $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 2\}$
  - größtes Element:



Beispiele

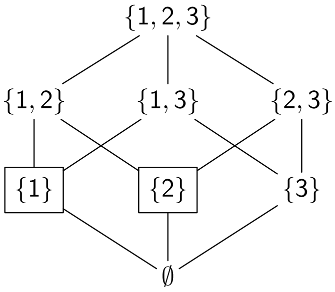
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\{-1, 2\}$
  - obere Schranken: $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 2\}$
  - größtes Element: 2



Relationen — Ordnungsrelationen

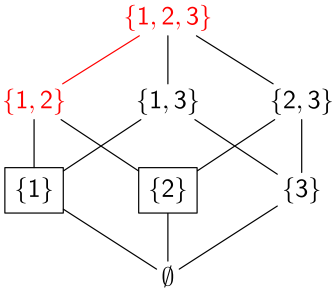
Beispiele

- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\{-1, 2\}$
  - obere Schranken: $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 2\}$
  - größtes Element: 2
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ hat $\{\{1\}, \{2\}\}$
  - obere Schranken:
  - größtes Element:



Beispiele

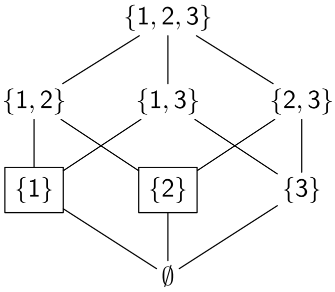
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\{-1, 2\}$
  - obere Schranken: $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 2\}$
  - größtes Element: 2
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ hat $\{\{1\}, \{2\}\}$
  - obere Schranken:
    $\{1, 2\}$ und $\{1, 2, 3\}$
  - größtes Element:



Relationen — Ordnungsrelationen

Beispiele

- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\mathbb{N}$
  - obere Schranken: keine
  - größtes Element: keins
- in $(\mathbb{Z}, \leq)$ hat $\{-1, 2\}$
  - obere Schranken: $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 2\}$
  - größtes Element: 2
- in $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ hat $\{\{1\}, \{2\}\}$
  - obere Schranken: $\{1, 2\}$ und $\{1, 2, 3\}$
  - größtes Element: keins



§6.11 Theorem (Zorns Lemma)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge, in der jede Teilkette eine obere Schranke hat. Dann hat $(M, \preceq)$ ein maximales Element.

Max August Zorn (* 1906; † 1993)

- dtsch. Mathematiker
- Algebra, Gruppentheorie, Analysis
- vereinfachte Wohlordnungssatz

© Gerhard Hund

§6.12 Definition (wohlgeordnet)

Eine wohlgeordnete Menge $(M, \preceq)$ ist eine total geordnete Menge, so dass jede nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ ein kleinstes Element hat

§6.12 Definition (wohlgeordnet)

Eine wohlgeordnete Menge $(M, \preceq)$ ist eine total geordnete Menge, so dass jede nicht-leere Teilmenge $X \subseteq M$ ein kleinstes Element hat

§6.13 Theorem (Wohlordnungssatz)

Jede Menge M kann wohlgeordnet werden;
d.h. es existiert eine wohlgeordnete Menge $(M, \preceq)$

§6.14 Theorem (Hausdorff 1914)

Sei $(M, \preceq)$ eine teilweise geordnete Menge.
Jede Teilkette ist in einer maximalen Teilkette enthalten.
(eine Teilkette ist maximal, wenn jede größere Teilmenge keine Teilkette mehr ist)

Felix Hausdorff (* 1868; † 1942)

- dtsch. Mathematiker
- Mengenlehre, Topologie, Funktionsanalysis
- Professor der Universität Leipzig

Abschlussfrage

An welche Resultate glauben Sie?

- Auswahlaxiom
  — Wahl von Elementen für beliebig viele Mengen
- Zorns Lemma
  — jede Teilkette hat obere Schranke $\to$ maximales Element
- Wohlordnungssatz
  — jede Menge kann so total geordnet werden,
  dass jede Teilmenge ein kleinstes Element hat
- Hausdorff-Maximalitätsprinzip
  — jede Teilkette ist in maximaler Teilkette enthalten

Abschlussfrage

An welche Resultate glauben Sie?

- Auswahlaxiom
  — Wahl von Elementen für beliebig viele Mengen
- Zorns Lemma
  — jede Teilkette hat obere Schranke $\to$ maximales Element
- Wohlordnungssatz
  — jede Menge kann so total geordnet werden,
  dass jede Teilmenge ein kleinstes Element hat
- Hausdorff-Maximalitätsprinzip
  — jede Teilkette ist in maximaler Teilkette enthalten

Alle Aussagen sind äquivalent

§6.15 Theorem

Der Wohlordnungssatz impliziert das Auswahlaxiom (in ZF)

§6.15 Theorem

Der Wohlordnungssatz impliziert das Auswahlaxiom (in ZF)

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen, so dass $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Des Weiteren sei $M = \bigcup \mathcal{M}$.

§6.15 Theorem

Der Wohlordnungssatz impliziert das Auswahlaxiom (in ZF)

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen, so dass $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Des Weiteren sei $M = \bigcup \mathcal{M}$. Aufgrund des Wohlordnungssatzes existiert eine wohlgeordnete Menge $(M, \preceq)$. Für jedes $X \in \mathcal{M}$ definieren wir $c \colon \mathcal{M} \to M$ durch

$$c(X) = m \quad \text{wobei } m \text{ das kleinste Element von } X \text{ ist}$$

$$c(X) = \min_{\preceq} X$$

§6.15 Theorem

Der Wohlordnungssatz impliziert das Auswahlaxiom (in ZF)

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen, so dass $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Des Weiteren sei $M = \bigcup \mathcal{M}$. Aufgrund des Wohlordnungssatzes existiert eine wohlgeordnete Menge $(M, \preceq)$. Für jedes $X \in \mathcal{M}$ definieren wir $c \colon \mathcal{M} \to M$ durch

$$c(X) = m \quad \text{wobei } m \text{ das kleinste Element von } X \text{ ist}$$

$$c(X) = \min_{\preceq} X$$

Aufgrund der Wohlordnung existieren die kleinsten Elemente (und diese sind eindeutig) und es gilt $c(X) \in X$. $\square$

Notizen:

- Auswahlaxiom ist unabhängig von ZF
- ZF konsistent $\rightarrow$ ZFC konsistent [Gödel 1940]
  (Negation von AC lässt sich nicht aus ZF ableiten)
- ZF konsistent $\rightarrow$ ZF($\neg$C) konsistent [Cohen 1963]
  (AC lässt sich nicht aus ZF ableiten)

Funktionen — Auswahlaxiom

Notizen:

- Auswahlaxiom ist unabhängig von ZF
- ZF konsistent $\rightarrow$ ZFC konsistent [Gödel 1940]

  (Negation von AC lässt sich nicht aus ZF ableiten)
- ZF konsistent $\rightarrow$ ZF($\neg$C) konsistent [Cohen 1963]

  (AC lässt sich nicht aus ZF ableiten)

Kurt Gödel (* 1906; † 1978)

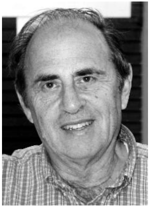
- öster.-amerik. Logiker und Mathematiker
- prominentester Logiker des 20. Jhd.
- Unvollständigkeitstheoreme
  (siehe *Berechenbarkeit*)

Notizen:

- Auswahlaxiom ist unabhängig von ZF
- ZF konsistent $\rightarrow$ ZFC konsistent [Gödel 1940]
  (Negation von AC lässt sich nicht aus ZF ableiten)
- ZF konsistent $\rightarrow$ ZF($\neg$C) konsistent [Cohen 1963]
  (AC lässt sich nicht aus ZF ableiten)

Paul Joseph Cohen (* 1934; † 2007)

- amerik. Mathematiker
- beherrschte viele Gebiete der Mathematik
- Unabhängigkeit von CH und AC



Zusammenfassung

- Invertierung von Funktionen
- Auswahlaxiom
- Peano-Axiome der natürlichen Zahlen
- Ordnungsrelationen
- spezielle Elemente in Ordnungen
- zum Auswahlaxiom äquivalente Axiome

Dritte Aufgabenserie bereits im AlmaWeb verfügbar