Diskrete Strukturen

Vorlesung 5: Äquivalenzrelationen und Funktionen

13. November 2018

Nächste Termine — Modul "Diskrete Strukturen"

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
12.11.	13.11. Funktionen (2. Abgabe + 3. Übungsblatt)
19.11. Hörsaalübung 3. Übungsw. (Feiertag 21.11.)	20.11. Auswahlaxiom
26.11.	27.11. Ordnungsrelationen (3. Abgabe + 4. Übungsblatt)
3.12. **dies academicus** 4. Übungswoche	4.12. Kardinalitäten
10.12. Hörsaalübung	11.12. Verbände (4. Abgabe + 5. Übungsblatt)
17.12. Hörsaalübung 5. Übungswoche	18.12. Boolesche Algebren
24.12.	25.12.
31.12.	1.1.

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
7.1.	8.1. Körper (5. Abgabe + 6. Übungsblatt)
14.1. Hörsaalübung 6. Übungswoche	15.1. Graphen und Bäume
21.1.	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe + 7. Übungsblatt)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik
11.2.	12.2.
18.2. Prüfungswoche	19.2. Prüfung am 22.2.
25.2.	26.2.

Organisation

Hausaufgabenpunkte:

- Link im AlmaWeb (bei den Übungsblättern)

Organisation

Hausaufgabenpunkte:

- Link im AlmaWeb (bei den Übungsblättern)

Prüfung:

- Freitag, den 22. Februar 2019 von 10–11 Uhr
  im AudiMax, HS 3, HS 9
- Abmeldungen noch bis zum 14. Januar 2019 möglich
- schriftlich, 60 min
- Hilfsmittel: nur ein beschriebenes oder bedrucktes DIN-A4-Blatt

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen
2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Äquivalenzrelationen
- Einführung Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen

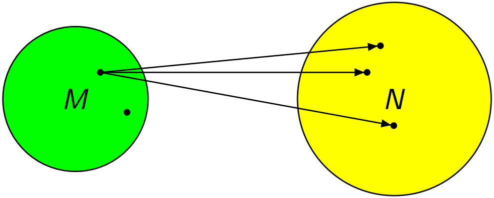
Bitte Fragen direkt stellen!

Wiederholung: Relationen

Definition (§4.10 Relation)

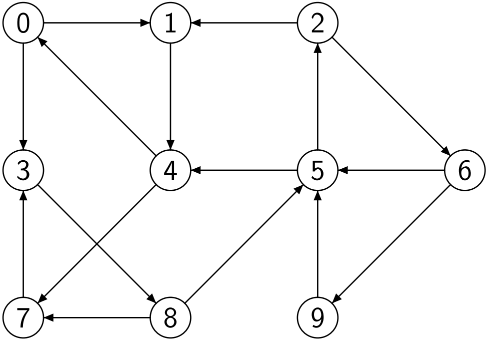
Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

Relation von M nach N (Elemente unbenannt):



Wiederholung: Relationen

Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (Elemente benannt):



$\{(0,1), (0,3), (1,4), (2,1), (2,6), (3,8), (4,0), (4,7),$
$(5,2), (5,4), (6,5), (6,9), (7,3), (8,5), (8,7), (9,5)\}$

§5.1 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation
gdw. sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist

(Universum M)

§5.1 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation
gdw. sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist

- $\forall x(x \equiv x)$ — reflexiv
- $\forall x, y(x \equiv y \to y \equiv x)$ — symmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \equiv y \land y \equiv z) \to x \equiv z\big)$ — transitiv

(Universum M)

§5.1 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation
gdw. sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist

- $\forall x(x \equiv x)$ reflexiv
- $\forall x, y(x \equiv y \to y \equiv x)$ symmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \equiv y \land y \equiv z) \to x \equiv z\big)$ transitiv

(Universum M)

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓	✗	✗

§5.1 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $\equiv$ auf M ist eine Äquivalenzrelation
gdw. sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist

- $\forall x(x \equiv x)$ reflexiv
- $\forall x, y(x \equiv y \to y \equiv x)$ symmetrisch
- $\forall x, y, z\big((x \equiv y \land y \equiv z) \to x \equiv z\big)$ transitiv

(Universum M)

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓	✗	✗

Beispiele

1. $=$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist keine Äquivalenzrelation

Relationen — Äquivalenzrelationen

Beispiele

1. $=$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist keine Äquivalenzrelation
3. $R_2 = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n + n' \text{ ist gerade}\}$
   ist eine Äquivalenzrelation

Beispiele

1. $=$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist keine Äquivalenzrelation
3. $R_2 = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n + n' \text{ ist gerade}\}$
   ist eine Äquivalenzrelation

Beweis zu 3.

- reflexiv: für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $x + x = 2x$ gerade, also $(x, x) \in R_2$

Relationen — Äquivalenzrelationen

Beispiele

1. $=$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist keine Äquivalenzrelation
3. $R_2 = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n + n' \text{ ist gerade}\}$
   ist eine Äquivalenzrelation

Beweis zu 3.

- reflexiv: für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $x + x = 2x$ gerade, also $(x, x) \in R_2$
- symmetrisch: Seien $x, y \in \mathbb{N}$, so dass $(x, y) \in R_2$.
  Damit ist $x + y = y + x$ gerade, womit auch $(y, x) \in R_2$ gilt.

Beispiele

1. $=$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation
2. $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist keine Äquivalenzrelation
3. $R_2 = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n + n' \text{ ist gerade}\}$
   ist eine Äquivalenzrelation

Beweis zu 3.

- reflexiv: für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $x + x = 2x$ gerade, also $(x, x) \in R_2$
- symmetrisch: Seien $x, y \in \mathbb{N}$, so dass $(x, y) \in R_2$.
  Damit ist $x + y = y + x$ gerade, womit auch $(y, x) \in R_2$ gilt.
- transitiv: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$, so dass $(x, y) \in R_2$ und $(y, z) \in R_2$. Daher sind $x + y$ und $y + z$ gerade; d.h. es existieren $k, \ell \in \mathbb{N}$, so dass $x + y = 2k$ und $y + z = 2\ell$.

$$x + z = (2k - y) + (2\ell - y) = 2k + 2\ell - 2y = 2(k + \ell - y)$$

womit auch $x + z$ gerade ist und daher $(x, z) \in R_2$. $\square$

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 0 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 0 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

- $(1,0) \notin R_2$ und $(1,1) \in R_2$ und $(1,2) \notin R_2$

$\rightarrow$ 1 steht genau zu allen ungeraden Zahlen in Relation

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 0 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

- $(1,0) \notin R_2$ und $(1,1) \in R_2$ und $(1,2) \notin R_2$

$\rightarrow$ 1 steht genau zu allen ungeraden Zahlen in Relation

- $(2,0) \in R_2$ und $(2,1) \notin R_2$ und $(2,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 2 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

Wie sieht R_2 aus?

- $(0, 0) \in R_2$ und $(0, 1) \notin R_2$ und $(0, 2) \in R_2$

$\rightarrow$ 0 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

- $(1, 0) \notin R_2$ und $(1, 1) \in R_2$ und $(1, 2) \notin R_2$

$\rightarrow$ 1 steht genau zu allen ungeraden Zahlen in Relation

- $(2, 0) \in R_2$ und $(2, 1) \notin R_2$ und $(2, 2) \in R_2$

$\rightarrow$ 2 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

R_2 unterscheidet zwischen gerade/ungerade

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 0 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

- $(1,0) \notin R_2$ und $(1,1) \in R_2$ und $(1,2) \notin R_2$

$\rightarrow$ 1 steht genau zu allen ungeraden Zahlen in Relation

- $(2,0) \in R_2$ und $(2,1) \notin R_2$ und $(2,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 2 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

R_2 unterscheidet zwischen gerade/ungerade

§5.2 Definition (Äquivalenzklasse)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und $m \in M$ beliebig. Dann ist

$$[m]_{\equiv} = \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

die m-Äquivalenzklasse von $\equiv$.

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ $[0]_{R_2} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = G$

- $(1,0) \notin R_2$ und $(1,1) \in R_2$ und $(1,2) \notin R_2$

$\rightarrow$ 1 steht genau zu allen ungeraden Zahlen in Relation

- $(2,0) \in R_2$ und $(2,1) \notin R_2$ und $(2,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 2 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

R_2 unterscheidet zwischen gerade/ungerade

§5.2 Definition (Äquivalenzklasse)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und $m \in M$ beliebig. Dann ist

$$[m]_\equiv = \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

die *m-Äquivalenzklasse von $\equiv$*.

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ $[0]_{R_2} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = G$

- $(1,0) \notin R_2$ und $(1,1) \in R_2$ und $(1,2) \notin R_2$

$\rightarrow$ $[1]_{R_2} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = U$

- $(2,0) \in R_2$ und $(2,1) \notin R_2$ und $(2,2) \in R_2$

$\rightarrow$ 2 steht genau zu allen geraden Zahlen in Relation

R_2 unterscheidet zwischen gerade/ungerade

§5.2 Definition (Äquivalenzklasse)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und $m \in M$ beliebig. Dann ist

$$[m]_\equiv = \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

die m-Äquivalenzklasse von $\equiv$.

Wie sieht R_2 aus?

- $(0,0) \in R_2$ und $(0,1) \notin R_2$ und $(0,2) \in R_2$

$\rightarrow$ $[0]_{R_2} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = G$

- $(1,0) \notin R_2$ und $(1,1) \in R_2$ und $(1,2) \notin R_2$

$\rightarrow$ $[1]_{R_2} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = U$

- $(2,0) \in R_2$ und $(2,1) \notin R_2$ und $(2,2) \in R_2$

$\rightarrow$ $[2]_{R_2} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = G$

R_2 unterscheidet zwischen gerade/ungerade

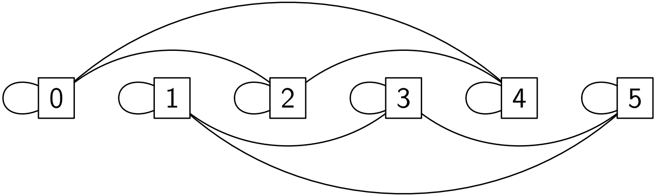
§5.2 Definition (Äquivalenzklasse)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und $m \in M$ beliebig. Dann ist

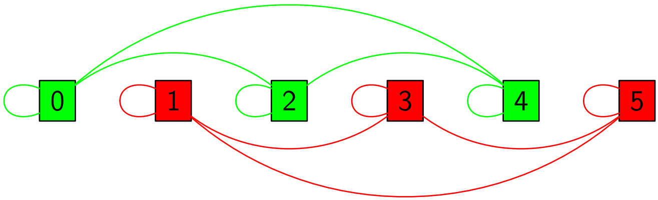
$$[m]_{\equiv} = \{x \in M \mid m \equiv x\}$$

die m-Äquivalenzklasse von $\equiv$.

statt beidseitiger Pfeile verwenden wir Splines ohne Pfeile



statt beidseitiger Pfeile verwenden wir Splines ohne Pfeile



Notation und Begriffe:

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und $m \in M$

- jedes $x \in [m]_\equiv$ heißt Vertreter oder Repräsentant der Äquivalenzklasse $[m]_\equiv$
- sofern $\equiv$ sich aus dem Kontext ergibt, schreiben wir einfach $[m]$ statt $[m]_\equiv$

§5.3 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und seien $x, y \in M$.
Dann gilt $x \equiv y$ gdw. $[x] = [y]$.

§5.3 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und seien $x, y \in M$.
Dann gilt $x \equiv y$ gdw. $[x] = [y]$.

Beweis (beidseitige Implikationen).

$(\rightarrow)$ Sei $x \equiv y$. Z.zg. $[x] = [y]$ durch beidseitige Teilmengen:

§5.3 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und seien $x, y \in M$.
Dann gilt $x \equiv y$ gdw. $[x] = [y]$.

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\to$) Sei $x \equiv y$. Z.zg. $[x] = [y]$ durch beidseitige Teilmengen:

- ($\subseteq$) Sei $z \in [x]$. Dann gilt $x \equiv z$. Mit Symmetrie folgt aus $x \equiv y$ auch $y \equiv x$ und vermittels Transitivität gilt damit $y \equiv z$. Folglich $z \in [y]$.

§5.3 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und seien $x, y \in M$.
Dann gilt $x \equiv y$ gdw. $[x] = [y]$.

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\rightarrow$) Sei $x \equiv y$. Z.zg. $[x] = [y]$ durch beidseitige Teilmengen:

- ($\subseteq$) Sei $z \in [x]$. Dann gilt $x \equiv z$. Mit Symmetrie folgt aus $x \equiv y$ auch $y \equiv x$ und vermittels Transitivität gilt damit $y \equiv z$. Folglich $z \in [y]$.
- ($\supseteq$) Sei $z \in [y]$. Dann gilt $y \equiv z$. Vermittels Transitivität gilt damit $x \equiv z$. Folglich $z \in [x]$.

§5.3 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M und seien $x, y \in M$.
Dann gilt $x \equiv y$ gdw. $[x] = [y]$.

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\rightarrow$) Sei $x \equiv y$. Z.zg. $[x] = [y]$ durch beidseitige Teilmengen:

- ($\subseteq$) Sei $z \in [x]$. Dann gilt $x \equiv z$. Mit Symmetrie folgt aus $x \equiv y$ auch $y \equiv x$ und vermittels Transitivität gilt damit $y \equiv z$. Folglich $z \in [y]$.
- ($\supseteq$) Sei $z \in [y]$. Dann gilt $y \equiv z$. Vermittels Transitivität gilt damit $x \equiv z$. Folglich $z \in [x]$.

($\leftarrow$) Sei $[x] = [y]$. Gemäß Reflexivität gilt $y \in [y] = [x]$.
Also $x \equiv y$. $\square$

§5.4 Definition (Quotient)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist

$$(M/{\equiv}) = \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen von $\equiv$ (auch: Quotient von M via $\equiv$)

§5.4 Definition (Quotient)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist

$$(M/{\equiv}) = \{[m]_{\equiv} \mid m \in M\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen von $\equiv$ (auch: Quotient von M via $\equiv$)

Beispiele

- $(\mathbb{N}/{=}) = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}$

§5.4 Definition (Quotient)

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann ist

$$(M/\equiv) = \{[m]_\equiv \mid m \in M\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen von $\equiv$ (auch: Quotient von M via $\equiv$)

Beispiele

- $(\mathbb{N}/=) = \big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\big\}$
- $(\mathbb{N}/R_2) = \big\{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\big\} = \{G, U\}$

§5.5 Definition (Zerlegung)

Sei M eine Menge. Eine Zerlegung von M ist eine Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$, so dass

1. $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (alle Teilmengen nichtleer)
2. $M = \bigcup \mathcal{N}$ (jedes Element vertreten)
3. $N \cap N' = \emptyset$ für alle $N, N' \in \mathcal{N}$ mit $N \neq N'$ (zwei verschiedene Elemente sind disjunkt)

§5.5 Definition (Zerlegung)

Sei M eine Menge. Eine Zerlegung von M ist eine Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$, so dass

1. $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (alle Teilmengen nichtleer)
2. $M = \bigcup \mathcal{N}$ (jedes Element vertreten)
3. $N \cap N' = \emptyset$ für alle $N, N' \in \mathcal{N}$ mit $N \neq N'$ (zwei verschiedene Elemente sind disjunkt)

Beispiele

- $(\mathbb{N}/=) = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}$

§5.5 Definition (Zerlegung)

Sei M eine Menge. Eine Zerlegung von M ist eine Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$, so dass

1. $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (alle Teilmengen nichtleer)
2. $M = \bigcup \mathcal{N}$ (jedes Element vertreten)
3. $N \cap N' = \emptyset$ für alle $N, N' \in \mathcal{N}$ mit $N \neq N'$ (zwei verschiedene Elemente sind disjunkt)

Beispiele

- $(\mathbb{N}/=) = \big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\big\}$
- $(\mathbb{N}/R_2) = \big\{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\big\} = \{G, U\}$

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M} = (M/\equiv) = \{[m] \mid m \in M\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Z.zg. $\mathcal{M}$ ist Zerlegung (§5.5 Punkte ①–③):

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M} = (M/\equiv) = \{[m] \mid m \in M\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Z.zg. $\mathcal{M}$ ist Zerlegung (§5.5 Punkte ①–③):

1. *(Direkt.)* $\equiv$ ist reflexiv und damit $m \in [m]$ für jedes $m \in M$.
   Also gilt $[m] \neq \emptyset$ und damit $\emptyset \notin \mathcal{M} = \{[m] \mid m \in M\}$.

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/{\equiv})$ eine Zerlegung von M.

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M} = (M/{\equiv}) = \{[m] \mid m \in M\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Z.zg. $\mathcal{M}$ ist Zerlegung (§5.5 Punkte 1–3):

1. *(Direkt.)* $\equiv$ ist reflexiv und damit $m \in [m]$ für jedes $m \in M$.
   Also gilt $[m] \neq \emptyset$ und damit $\emptyset \notin \mathcal{M} = \{[m] \mid m \in M\}$.
2. *(Beidseitige Teilmengen.)* $\bigcup \mathcal{M} \subseteq M$ ist trivial. Für jedes $m \in M$ gilt $m \in [m] \subseteq \bigcup \mathcal{M}$ wie in 1, womit $M \subseteq \bigcup \mathcal{M}$.

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/{\equiv})$ eine Zerlegung von M.

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M} = (M/{\equiv}) = \{[m] \mid m \in M\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Z.zg. $\mathcal{M}$ ist Zerlegung (§5.5 Punkte ①–③):

1. *(Direkt.)* $\equiv$ ist reflexiv und damit $m \in [m]$ für jedes $m \in M$.
   Also gilt $[m] \neq \emptyset$ und damit $\emptyset \notin \mathcal{M} = \{[m] \mid m \in M\}$.
2. *(Beidseitige Teilmengen.)* $\bigcup \mathcal{M} \subseteq M$ ist trivial. Für jedes $m \in M$ gilt $m \in [m] \subseteq \bigcup \mathcal{M}$ wie in ①, womit $M \subseteq \bigcup \mathcal{M}$.
3. *(Kontraposition, dann beidseitige Teilmengen.)* Seien $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Dann existiert $m \in M_1 \cap M_2$.

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/\equiv)$ eine Zerlegung von M.

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M} = (M/\equiv) = \{[m] \mid m \in M\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Z.zg. $\mathcal{M}$ ist Zerlegung (§5.5 Punkte 1–3):

1. *(Direkt.)* $\equiv$ ist reflexiv und damit $m \in [m]$ für jedes $m \in M$.
   Also gilt $[m] \neq \emptyset$ und damit $\emptyset \notin \mathcal{M} = \{[m] \mid m \in M\}$.
2. *(Beidseitige Teilmengen.)* $\bigcup \mathcal{M} \subseteq M$ ist trivial. Für jedes $m \in M$ gilt $m \in [m] \subseteq \bigcup \mathcal{M}$ wie in 1, womit $M \subseteq \bigcup \mathcal{M}$.
3. *(Kontraposition, dann beidseitige Teilmengen.)* Seien $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Dann existiert $m \in M_1 \cap M_2$. Für jedes $x \in M_1$ gilt $m \equiv x$ und damit $x \in M_2$. Also $M_1 \subseteq M_2$.

§5.6 Theorem

Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist $(M/{\equiv})$ eine Zerlegung von M.

Beweis (direkt).

Sei $\mathcal{M} = (M/{\equiv}) = \{[m] \mid m \in M\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Z.zg. $\mathcal{M}$ ist Zerlegung (§5.5 Punkte 1–3):

1. *(Direkt.)* $\equiv$ ist reflexiv und damit $m \in [m]$ für jedes $m \in M$. Also gilt $[m] \neq \emptyset$ und damit $\emptyset \notin \mathcal{M} = \{[m] \mid m \in M\}$.
2. *(Beidseitige Teilmengen.)* $\bigcup \mathcal{M} \subseteq M$ ist trivial. Für jedes $m \in M$ gilt $m \in [m] \subseteq \bigcup \mathcal{M}$ wie in 1, womit $M \subseteq \bigcup \mathcal{M}$.
3. *(Kontraposition, dann beidseitige Teilmengen.)* Seien $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ mit $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Dann existiert $m \in M_1 \cap M_2$. Für jedes $x \in M_1$ gilt $m \equiv x$ und damit $x \in M_2$. Also $M_1 \subseteq M_2$. Ebenso $M_2 \subseteq M_1$ da $m \equiv y$ und $y \in M_1$ für alle $y \in M_2$. $\square$

§5.7 Theorem

Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann ist

$$\equiv = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists N(N \in \mathcal{N} \land \{x, y\} \subseteq N)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

§5.7 Theorem

Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann ist

$$\equiv \; = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists N(N \in \mathcal{N} \wedge \{x, \; y\} \subseteq N)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis (direkt).

Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- reflexiv: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{N}$ (§5.5), gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.

§5.7 Theorem

Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann ist

$$\equiv\; = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists N(N \in \mathcal{N} \wedge \{x,\ y\} \subseteq N)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis (direkt).

Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- reflexiv: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{N}$ (§5.5), gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- symmetrisch: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{N}$ mit $\{x,\ y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.

§5.7 Theorem

Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann ist

$$\equiv \; = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists N (N \in \mathcal{N} \wedge \{x, y\} \subseteq N)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis (direkt).

Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- reflexiv: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{N}$ (§5.5), gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- symmetrisch: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{N}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- transitiv: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{N}$ mit $\{x, y\} \subseteq N$ und $\{y, z\} \subseteq N'$.

§5.7 Theorem

Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann ist

$$\equiv \; = \{(x,y) \in M \times M \mid \exists N(N \in \mathcal{N} \wedge \{x,\, y\} \subseteq N)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis (direkt).

Offensichtlich ist $\equiv$ eine Relation auf M.

- reflexiv: Sei $x \in M$. Da $M = \bigcup \mathcal{N}$ (§5.5), gibt es eine Menge $N \in \mathcal{N}$ mit $x \in N$. Also $x \equiv x$.
- symmetrisch: Sei $x \equiv y$. Dann existiert $N \in \mathcal{N}$ mit $\{x,\, y\} \subseteq N$. Folglich auch $y \equiv x$.
- transitiv: Seien $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Also existieren $N, N' \in \mathcal{N}$ mit $\{x,\, y\} \subseteq N$ und $\{y,\, z\} \subseteq N'$. Da $y \in N \cap N'$ gilt $N = N'$ nach §5.5 3. Folglich $\{x,\, z\} \subseteq N$ und damit $x \equiv z$. $\square$

§5.8 Korollar

- Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt

$$\equiv\; = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists N(N \in (M/\equiv) \wedge \{x, y\} \subseteq N)\}$$

- Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann gilt $\mathcal{N} = (M/\equiv)$, wobei

$$\equiv\; = \{(x, y) \in M \times M \mid \exists N(N \in \mathcal{N} \wedge \{x, y\} \subseteq N)\}$$

§5.8 Korollar

- Sei $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt

$$\equiv\; = \{(x,y) \in M \times M \mid \exists N(N \in (M/\equiv) \wedge \{x,y\} \subseteq N)\}$$

- Sei $\mathcal{N}$ eine Zerlegung von M. Dann gilt $\mathcal{N} = (M/\equiv)$, wobei

$$\equiv\; = \{(x,y) \in M \times M \mid \exists N(N \in \mathcal{N} \wedge \{x,y\} \subseteq N)\}$$

Zusammenfassung:

- Äquivalenzrelationen und Zerlegungen sind (stark) korrespondierende Begriffe

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

- Freund-Relation auf den Facebook-Nutzern F

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

Funktionen — Motivation

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

- Freund-Relation auf den Facebook-Nutzern F

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

Diskussion:

- manchmal ist eine eindeutige Zuordnung gewünscht

  z.B. Identifikationsnummer

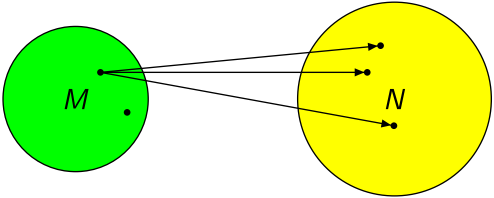
- derartige Relationen sehr relevant in Praxis (Programmierung) und Theorie (Mathematik)

Eigenschaften

- jedes $m \in M$ sollte einen Partner haben
- jedes $m \in M$ sollte eindeutigen Partner haben

$\rightarrow$ jedes $m \in M$ sollte genau einen Partner haben

Illustration einer Relation, die keine eindeutige Zuordnung liefert:

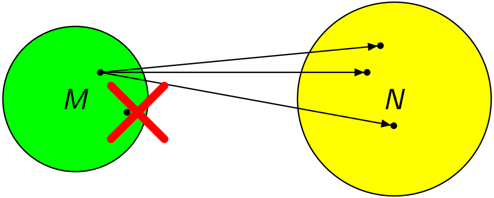


Eigenschaften

- jedes $m \in M$ sollte einen Partner haben
- jedes $m \in M$ sollte eindeutigen Partner haben

$\rightarrow$ jedes $m \in M$ sollte genau einen Partner haben

Illustration einer Relation, die keine eindeutige Zuordnung liefert:

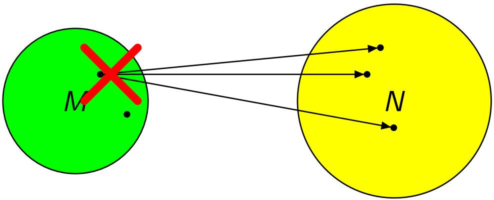


Eigenschaften

- jedes $m \in M$ sollte einen Partner haben
- jedes $m \in M$ sollte eindeutigen Partner haben

$\rightarrow$ jedes $m \in M$ sollte genau einen Partner haben

Illustration einer Relation, die keine eindeutige Zuordnung liefert:



§5.9 Definition (Funktion)

Eine Relation $R \subseteq M \times N$ ist eine Funktion oder Abbildung gdw.
für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.

§5.9 Definition (Funktion)

Eine Relation $R \subseteq M \times N$ ist eine Funktion oder Abbildung gdw. für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ existiert, so dass $(m, n) \in R$.

- *Formalisierung:* …mind. ein $n \in N$ …

$$\forall m\Big(m \in M \to \exists n\big(n \in N \wedge R(m, n)\big)\Big)$$

(jedes $m \in M$ hat einen Partner)

- *Formalisierung:* …höchstens ein $n \in N$ …

$$\forall m, x, y\Big(\big(m \in M \wedge x \in N \wedge y \in N \wedge R(m, x) \wedge R(m, y)\big) \to x = y\Big)$$

(alle Partner von m sind gleich)

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

ist (vermutlich) eine Funktion

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

  $$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

  ist (vermutlich) eine Funktion

- Freund-Relation auf den Facebook-Nutzern F

  $$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

  ist (vermutlich) keine Funktion

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

  $$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

  ist (vermutlich) eine Funktion

- Freund-Relation auf den Facebook-Nutzern F

  $$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

  ist (vermutlich) keine Funktion

- $R = \{(n, n') \mid n \in \mathbb{N},\ n' = 2n\}$ ist eine Funktion

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

  $$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

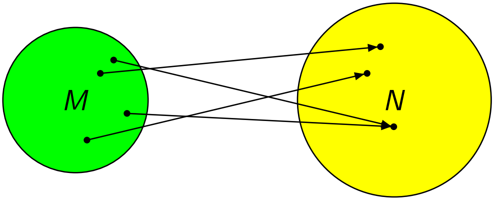
  ist (vermutlich) eine Funktion

- Freund-Relation auf den Facebook-Nutzern F

  $$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

  ist (vermutlich) keine Funktion

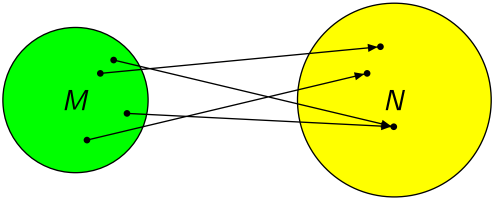
- $R = \{(n, n') \mid n \in \mathbb{N},\ n' = 2n\}$ ist eine Funktion
- id_M ist eine Funktion



§5.10 Notation

Sei $f \subseteq M \times N$ eine Funktion von M nach N

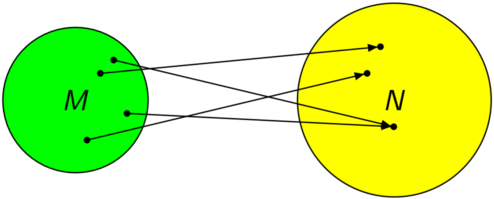
- Kurzschreibweise: $f\colon M \to N$



§5.10 Notation

Sei $f \subseteq M \times N$ eine Funktion von M nach N

- Kurzschreibweise: $f\colon M \to N$
- üblicherweise Kleinbuchstaben für Funktionen



§5.10 Notation

Sei $f \subseteq M \times N$ eine Funktion von M nach N

- Kurzschreibweise: $f : M \to N$
- üblicherweise Kleinbuchstaben für Funktionen
- für jedes $m \in M$ und $n \in N$ mit $(m, n) \in f$ schreiben wir $n = f(m)$
  alternativ: $f : m \mapsto n$ oder $m \overset{f}{\mapsto} n$
  in Worten: f bildet m auf n ab

Beispiele

- sei $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ die Funktion, so dass für alle $m \in M$
$$\mathrm{id}_M(m) = m$$
- sei $\mathrm{verdoppeln} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{verdoppeln}(n) = 2n$$

§5.11 Definition (Definitions- und Bildbereich)

Sei $f : M \to N$.

- M heißt Definitionsbereich von f
- N heißt Bildbereich von f

alternativ: Wertebereich oder Zielbereich

§5.11 Definition (Definitions- und Bildbereich)

Sei $f\colon M \to N$.

- M heißt Definitionsbereich von f
- N heißt Bildbereich von f

  alternativ: Wertebereich oder Zielbereich
- für alle $M' \subseteq M$ ist $f(M') = \{f(m) \mid m \in M'\}$ die Menge aller Bilder von Elementen aus M'

§5.11 Definition (Definitions- und Bildbereich)

Sei $f: M \to N$.

- M heißt Definitionsbereich von f
- N heißt Bildbereich von f

  alternativ: Wertebereich oder Zielbereich
- für alle $M' \subseteq M$ ist $f(M') = \{f(m) \mid m \in M'\}$
  die Menge aller Bilder von Elementen aus M'
- für alle $N' \subseteq N$ ist $f^{-1}(N') = \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$
  die Menge aller Ur-Bilder von Elementen aus N'

§5.11 Definition (Definitions- und Bildbereich)

Sei $f\colon M \to N$.

- M heißt Definitionsbereich von f
- N heißt Bildbereich von f

  alternativ: Wertebereich oder Zielbereich
- für alle $M' \subseteq M$ ist $f(M') = \{f(m) \mid m \in M'\}$
  die Menge aller Bilder von Elementen aus M'
- für alle $N' \subseteq N$ ist $f^{-1}(N') = \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$
  die Menge aller Ur-Bilder von Elementen aus N'

Beispiele

- $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$ für alle $M' \subseteq M$

§5.11 Definition (Definitions- und Bildbereich)

Sei $f\colon M \to N$.

- M heißt Definitionsbereich von f
- N heißt Bildbereich von f

  alternativ: Wertebereich oder Zielbereich
- für alle $M' \subseteq M$ ist $f(M') = \{f(m) \mid m \in M'\}$
  die Menge aller Bilder von Elementen aus M'
- für alle $N' \subseteq N$ ist $f^{-1}(N') = \{m \in M \mid f(m) \in N'\}$
  die Menge aller Ur-Bilder von Elementen aus N'

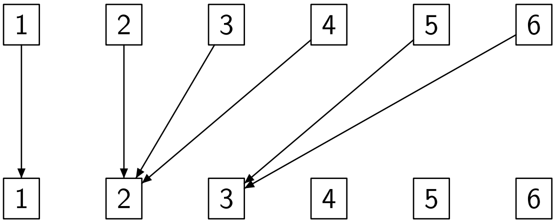
Beispiele

- $\mathrm{id}_M(M') = M'$ und $\mathrm{id}_M^{-1}(M') = M'$ für alle $M' \subseteq M$
- $\mathrm{verdoppeln}(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ und $\mathrm{verdoppeln}^{-1}(U) = \emptyset$

Beispiel

- sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $f : M \to M$, so dass $f(m) = \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$

Aufrunden $\lceil \cdots \rceil$

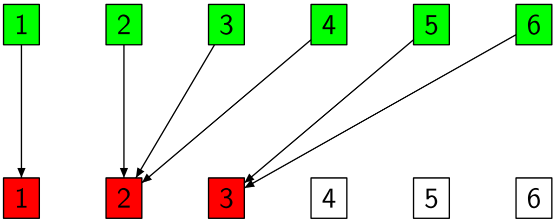


Beispiel

- sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $f : M \to M$, so dass $f(m) = \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$

  Aufrunden $\lceil \cdots \rceil$

- $f(M) = \{1, 2, 3\}$

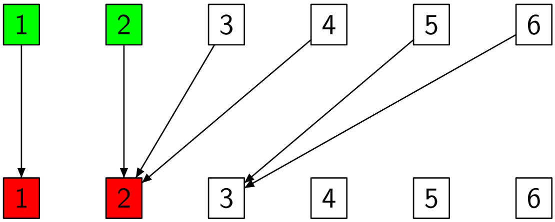


Beispiel

- sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $f : M \to M$, so dass $f(m) = \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$

Aufrunden $\lceil \cdots \rceil$

- $f(M) = \{1, 2, 3\}$
- $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$



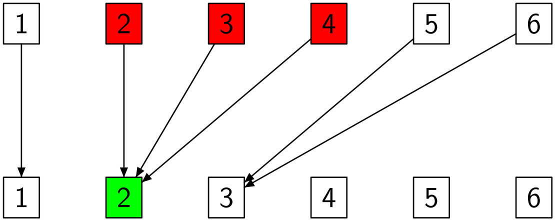
Funktionen — Grundlagen

Beispiel

- sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $f : M \to M$, so dass $f(m) = \lceil \sqrt{m} \rceil$ für alle $m \in M$

  Aufrunden $\lceil \cdots \rceil$

- $f(M) = \{1, 2, 3\}$
- $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{2, 3, 4\}$



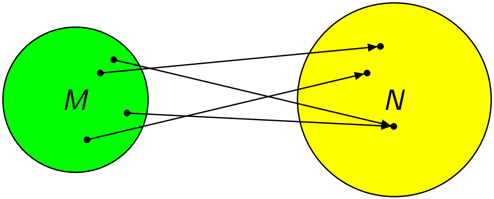
§5.12 Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Eine Funktion $f : M \to N$ ist

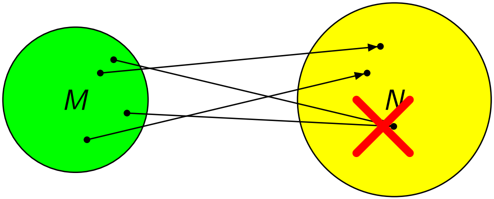
- injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben

$$\forall x, y\big((x \in M \land y \in M \land x \neq y) \to f(x) \neq f(y)\big)$$

nicht injektiv:



nicht injektiv:



§5.12 Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist

- injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben

$$\forall m, m' \big((m \in M \wedge m' \in M \wedge m \neq m') \to f(m) \neq f(m')\big)$$

- surjektiv gdw. $f(M) = N$
  jedes Element von N ist Bild eines Elements von M

$$\forall n \big(n \in N \to \exists m (m \in M \wedge f(m) = n)\big)$$

§5.12 Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Eine Funktion $f\colon M \to N$ ist

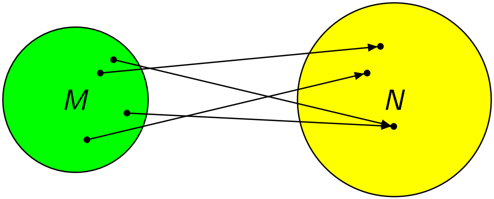
- injektiv gdw. alle verschiedenen Elemente von M auch verschiedene Bilder unter f haben

$$\forall m, m' \big((m \in M \wedge m' \in M \wedge m \neq m') \to f(m) \neq f(m')\big)$$

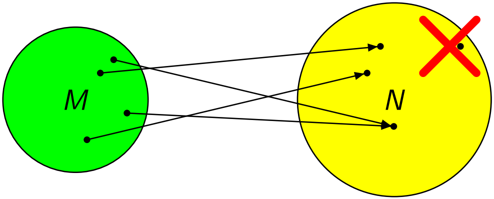
- surjektiv gdw. $f(M) = N$
  jedes Element von N ist Bild eines Elements von M

$$\forall n \big(n \in N \to \exists m (m \in M \wedge f(m) = n)\big)$$

- bijektiv gdw. f injektiv und surjektiv ist surjektiv:



nicht surjektiv:



Beispiele

- $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(m) = m$ ist bijektiv

Funktionen — Eigenschaften

Beispiele

- $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(m) = m$ ist bijektiv
- verdoppeln: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit verdoppeln$(n) = 2n$
  ist injektiv, aber nicht surjektiv (3 nicht erreichbar)

Beispiele

- $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(m) = m$ ist bijektiv
- $\mathrm{verdoppeln} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{verdoppeln}(n) = 2n$
  ist injektiv, aber nicht surjektiv (3 nicht erreichbar)
- $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$
  ist nicht injektiv, aber surjektiv (denn $f(2) = f(3)$)

Beispiele

- $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(m) = m$ ist bijektiv
- $\mathrm{verdoppeln} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{verdoppeln}(n) = 2n$
  ist injektiv, aber nicht surjektiv (3 nicht erreichbar)
- $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$
  ist nicht injektiv, aber surjektiv (denn $f(2) = f(3)$)
- $\mathrm{quadrieren} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{quadrieren}(x) = x^2$
  ist weder injektiv noch surjektiv
  (negative Zahlen nicht erreichbar und $(-2)^2 = 2^2$)

Notizen:

- eine bijektive Funktion auf einer Menge M heißt auch
  Permutation von M (siehe Kombinatorik)
- wir importieren alle Operationen von Relationen
  z.B. zwei Funktionen $f, g \colon M \to N$ sind gleich ($f = g$) gdw.
  $f(m) = g(m)$ für alle $m \in M$
  dies entspricht der Gleichheit der Relationen

Notizen:

- eine bijektive Funktion auf einer Menge M heißt auch Permutation von M (siehe Kombinatorik)
- wir importieren alle Operationen von Relationen
  z.B. zwei Funktionen $f, g\colon M \to N$ sind gleich ($f = g$) gdw.
  $f(m) = g(m)$ für alle $m \in M$
  dies entspricht der Gleichheit der Relationen

§5.13 Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Funktionen — Eigenschaften

Notizen:

- eine bijektive Funktion auf einer Menge M heißt auch
  Permutation von M (siehe Kombinatorik)
- wir importieren alle Operationen von Relationen
  z.B. zwei Funktionen $f, g\colon M \to N$ sind gleich ($f = g$) gdw.
  $f(m) = g(m)$ für alle $m \in M$
  dies entspricht der Gleichheit der Relationen

§5.13 Theorem

Die Komposition zweier Funktionen ist wieder eine Funktion.

Beweis (direkt).

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$. Dann ist $(f\,;g)(m) = g(f(m))$ für alle $m \in M$. $\square$

§5.14 Theorem

Seien $f: M \to N$, $g: N \to P$ und $h: P \to Q$.

1. $(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$ (Assoziativität der Komposition)
2. $f\,;g$ ist injektiv, falls f und g injektiv sind

§5.14 Theorem

Seien $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ und $h\colon P \to Q$.

1. $(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$ (Assoziativität der Komposition)
2. $f\,;g$ ist injektiv, falls f und g injektiv sind

Beweis (direkt).

1. Nach §5.13 sind beides Funktionen. Sei $m \in M$ beliebig.

$$\begin{aligned}((f\,;g)\,;h)(m) &= h((f\,;g)(m)) = h(g(f(m))) \\ &= (g\,;h)(f(m)) = (f\,;(g\,;h))(m)\end{aligned}$$

$\square$

§5.14 Theorem

Seien $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ und $h\colon P \to Q$.

1. $(f\,;g)\,;h = f\,;(g\,;h)$ (Assoziativität der Komposition)
2. $f\,;g$ ist injektiv, falls f und g injektiv sind

Beweis (direkt).

1. Nach §5.13 sind beides Funktionen. Sei $m \in M$ beliebig.

$$\begin{aligned}((f\,;g)\,;h)(m) &= h((f\,;g)(m)) = h(g(f(m))) \\ &= (g\,;h)(f(m)) = (f\,;(g\,;h))(m)\end{aligned}$$

2. Seien $m, m' \in M$ mit $m \neq m'$. Da f injektiv ist, gilt $f(m) \neq f(m')$. Da auch g injektiv ist, gilt weiterhin

$$(f\,;g)(m) = g(f(m)) \neq g(f(m')) = (f\,;g)(m')$$

$\square$

§5.15 Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

1. $f\,;\,g$ ist surjektiv, falls f und g surjektiv sind
2. $f\,;\,g$ ist bijektiv, falls f und g bijektiv sind

§5.15 Theorem

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$.

1. $f\,;g$ ist surjektiv, falls f und g surjektiv sind
2. $f\,;g$ ist bijektiv, falls f und g bijektiv sind

Beweis (direkt).

1. Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

$$(f\,;g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p$$

Also ist $f\,;g$ auch surjektiv.

§5.15 Theorem

Seien $f: M \to N$ und $g: N \to P$.

1. $f \,;\, g$ ist surjektiv, falls f und g surjektiv sind
2. $f \,;\, g$ ist bijektiv, falls f und g bijektiv sind

Beweis (direkt).

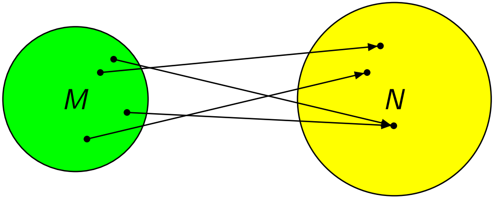
1. Sei $p \in P$ beliebig. Da g surjektiv ist, existiert $n \in N$, so dass $g(n) = p$. Weiterhin ist auch f surjektiv, wodurch $m \in M$ existiert, so dass $f(m) = n$. Also ist

   $$(f \,;\, g)(m) = g(f(m)) = g(n) = p$$

   Also ist $f \,;\, g$ auch surjektiv.
2. Dies ergibt sich direkt aus 1 und §5.14 2 $\square$

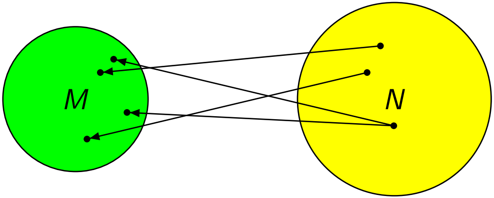
Notizen:

- die Assoziativität der Komposition gilt auch für Relationen
- f^{-1} ist i.A. nur eine Relation für $f : M \to N$



Notizen:

- die Assoziativität der Komposition gilt auch für Relationen
- f^{-1} ist i.A. nur eine Relation für $f : M \to N$



§5.16 Theorem

Sei $f: M \to N$. Für alle $m \in M$ und $n \in N$ gelten

1. $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$
2. $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ falls f surjektiv ist

§5.16 Theorem

Sei $f\colon M \to N$. Für alle $m \in M$ und $n \in N$ gelten

1. $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$
2. $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ falls f surjektiv ist

Beweis (direkt).

1. Wir setzen zunächst einfach die Definition ein:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{f(m)\}) &= \{x \in M \mid f(x) \in \{f(m)\}\} \\ &= \{x \in M \mid f(x) = f(m)\} \end{aligned}$$

und damit $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$.

§5.16 Theorem

Sei $f : M \to N$. Für alle $m \in M$ und $n \in N$ gelten

1. $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$
2. $f(f^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ falls f surjektiv ist

Beweis (direkt).

1. Wir setzen zunächst einfach die Definition ein:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{f(m)\}) &= \{x \in M \mid f(x) \in \{f(m)\}\} \\ &= \{x \in M \mid f(x) = f(m)\} \end{aligned}$$

   und damit $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$.

2. Ebenso ist $f^{-1}(\{n\})$ nicht-leer und damit

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\{n\})) &= \{f(x) \mid x \in f^{-1}(\{n\})\} \\ &= \{f(x) \mid x \in \{y \in M \mid f(y) = n\}\} \\ &= \{f(x) \mid x \in M,\ f(x) = n\} = \{n\} \end{aligned}$$

□

Zusammenfassung

- Äquivalenzrelationen und Zerlegungen
- Operationen auf Relationen
- Einführung Funktionen
- Definitions- und Bildbereich
- Eigenschaften von Funktionen

Dritte Aufgabenserie bereits im AlmaWeb verfügbar