Diskrete Strukturen

Vorlesung 4: Mengenlehre und Relationen

6. November 2018

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Verallgemeinerung Vereinigung und Schnitt
- Potenzmenge
- Vollständige Induktion
- Relationen und deren Eigenschaften
- Operationen auf Relationen

Bitte Fragen direkt stellen!

Bemerkungen:

- Vereinigung und Schnitt bisher nur zweistellig (zwei Argumente)

$\rightarrow$ Verallgemeinerung für beliebig viele Argumente

Bemerkungen:

- Vereinigung und Schnitt bisher nur zweistellig (zwei Argumente)

$\rightarrow$ Verallgemeinerung für beliebig viele Argumente

§4.1 Definition (allg. Vereinigung und Schnitt)

Sei I eine Menge und M_i eine Menge für jedes $i \in I$

- $$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{es existiert } i \in I \text{, so dass } x \in M_i\} = \{x \mid \exists i((i \in I) \wedge (x \in M_i))\}$$

Bemerkungen:

- Vereinigung und Schnitt bisher nur zweistellig (zwei Argumente)

$\rightarrow$ Verallgemeinerung für beliebig viele Argumente

§4.1 Definition (allg. Vereinigung und Schnitt)

Sei I eine Menge und M_i eine Menge für jedes $i \in I$

- $\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{es existiert } i \in I \text{, so dass } x \in M_i\}$
  $= \big\{x \mid \exists i\big((i \in I) \land (x \in M_i)\big)\big\}$
- $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\}$
  $= \big\{x \mid \forall i\big((i \in I) \rightarrow (x \in M_i)\big)\big\}$

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$
- geschlossenes Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$

$$[u, o] = \{r \in \mathbb{R} \mid u \leq r \leq o\}$$

- es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$
- geschlossenes Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$

$$[u, o] = \{r \in \mathbb{R} \mid u \leq r \leq o\}$$

- es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$

Beweis mit Ringinklusion.

Durch Ringinklusion: $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$
- geschlossenes Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$

$$[u, o] = \{r \in \mathbb{R} \mid u \leq r \leq o\}$$

- es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$

Beweis mit Ringinklusion.

Durch Ringinklusion: $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$

- zu $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$: Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n = \lceil |r| \rceil$ (aufrunden; i.e., $|r| \leq n$).
  Dann gilt $-n \leq r \leq n$ und damit $r \in [-n, n]$.
  Also auch $r \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$
- geschlossenes Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$

$$[u, o] = \{r \in \mathbb{R} \mid u \leq r \leq o\}$$

- es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$

Beweis mit Ringinklusion.

Durch Ringinklusion: $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$

- zu $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$: Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n = \lceil |r| \rceil$ (aufrunden; i.e., $|r| \leq n$).
  Dann gilt $-n \leq r \leq n$ und damit $r \in [-n, n]$.
  Also auch $r \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.
- zu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$: trivial, da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$
- geschlossenes Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$

$$[u, o] = \{r \in \mathbb{R} \mid u \leq r \leq o\}$$

- es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$

Beweis mit Ringinklusion.

Durch Ringinklusion: $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$

- zu $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$: Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n = \lceil |r| \rceil$ (aufrunden; i.e., $|r| \leq n$).
  Dann gilt $-n \leq r \leq n$ und damit $r \in [-n, n]$.
  Also auch $r \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.
- zu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$: trivial, da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$
- zu $\bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$: $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\square$

Beispiel

- Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reelle Zahl. Dann ist

$$\bigcap_{\substack{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ r \in [-x,x]}} [-x, x] = [-r, r]$$

Beispiel

- Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reelle Zahl. Dann ist

$$\bigcap_{\substack{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ r \in [-x,x]}} [-x, x] = [-r, r]$$

- Beweis in der Übung

§4.2 Notationsvarianten

- $\bigcup_{i=u}^{o} M_i = \bigcup_{i \in I} M_i$ und $\bigcap_{i=u}^{o} M_i = \bigcap_{i \in I} M_i$
  für $I = \{u, u+1, \ldots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ (bekannt von $\sum$ und $\prod$)

§4.2 Notationsvarianten

- $\bigcup_{i=u}^{o} M_i = \bigcup_{i \in I} M_i$ und $\bigcap_{i=u}^{o} M_i = \bigcap_{i \in I} M_i$
  für $I = \{u, u+1, \dots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ (bekannt von $\sum$ und $\prod$)
- $\bigcup \{M_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} M_i$ und $\bigcap \{M_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} M_i$

§4.2 Notationsvarianten

- $\bigcup_{i=u}^{o} M_i = \bigcup_{i\in I} M_i$ und $\bigcap_{i=u}^{o} M_i = \bigcap_{i\in I} M_i$
  für $I = \{u, u+1, \dots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ (bekannt von $\sum$ und $\prod$)
- $\bigcup \{M_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i\in I} M_i$ und $\bigcap \{M_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} M_i$

Sonderfälle:

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ für Universum U (oder undefiniert)

§4.2 Notationsvarianten

- $\bigcup_{i=u}^{o} M_i = \bigcup_{i\in I} M_i$ und $\bigcap_{i=u}^{o} M_i = \bigcap_{i\in I} M_i$
  für $I = \{u, u+1, \dots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ (bekannt von $\sum$ und $\prod$)
- $\bigcup \{M_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i\in I} M_i$ und $\bigcap \{M_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} M_i$

Sonderfälle:

- $\bigcup_{i\in\emptyset} M_i = \emptyset$
- $\bigcap_{i\in\emptyset} M_i = U$ für Universum U (oder undefiniert)

Beispiele

- $\bigcup \{\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $\bigcap \{\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\} = \{3\}$

Mengenlehre — Relation zu Quantoren

gleiche Mengen		Bezeichnung
$M \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$	$\bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$	Distributivität von $\cap$
$M \cup \left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)$	$\bigcap_{i\in I}(M \cup M_i)$	Distributivität von $\cup$
$\bigcap_{i\in I} A$	A	Idempotenz von $\bigcap$; $I \neq \emptyset$
$\bigcup_{i\in I} A$	A	Idempotenz von $\bigcup$; $I \neq \emptyset$
$\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^c$	$\bigcup_{i\in I} M_i^c$	deMorgan-Gesetz für $\bigcap$
$\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)^c$	$\bigcap_{i\in I} M_i^c$	deMorgan-Gesetz für $\bigcup$

§4.3 Definition (Potenzmenge)

Sei M eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

aller Teilmengen von M

§4.3 Definition (Potenzmenge)

Sei M eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

aller Teilmengen von M

Beispiele

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

§4.3 Definition (Potenzmenge)

Sei M eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

aller Teilmengen von M

Beispiele

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ ist die Menge

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

§4.4 Definition (naive Kardinalität)

Eine Menge M ist endlich, falls sie endlich viele Elemente hat.

- Falls M endlich ist, dann ist $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente
- Falls M unendlich (nicht endlich) ist,
  dann schreiben wir $|M| \geq \infty$ (später genauer)

§4.4 Definition (naive Kardinalität)

Eine Menge M ist endlich, falls sie endlich viele Elemente hat.

- Falls M endlich ist, dann ist $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente
- Falls M unendlich (nicht endlich) ist,
  dann schreiben wir $|M| \geq \infty$ (später genauer)

§4.5 Theorem (Erklärung "Potenzmenge")

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

§4.4 Definition (naive Kardinalität)

Eine Menge M ist endlich, falls sie endlich viele Elemente hat.

- Falls M endlich ist, dann ist $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente
- Falls M unendlich (nicht endlich) ist,
  dann schreiben wir $|M| \geq \infty$ (später genauer)

§4.5 Theorem (Erklärung "Potenzmenge")

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

... wir brauchen zunächst noch eine neue Beweistechnik ...

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
- Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n((n \in \mathbb{N}) \to (F(n) \to F(n+1)))$$

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
- Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$\forall n((n \in \mathbb{N}) \to (F(n) \to F(n+1)))$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x((x \in \mathbb{N}) \to F(x))$

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
- Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
  $\forall n((n \in \mathbb{N}) \to (F(n) \to F(n+1)))$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x((x \in \mathbb{N}) \to F(x))$

Notizen:

- $F(0)$ gilt offensichtlich gem. Induktionsanfang IA

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
- Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n((n \in \mathbb{N}) \to (F(n) \to F(n+1)))$$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x((x \in \mathbb{N}) \to F(x))$

Notizen:

- $F(0)$ gilt offensichtlich gem. Induktionsanfang IA
- daraus folgt gem. Induktionsschritt dann $F(1)$ IS

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
- Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n((n \in \mathbb{N}) \to (F(n) \to F(n+1)))$$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x((x \in \mathbb{N}) \to F(x))$

Notizen:

- $F(0)$ gilt offensichtlich gem. Induktionsanfang IA
- daraus folgt gem. Induktionsschritt dann $F(1)$ IS
- woraus gem. Induktionsschritt $F(2)$ folgt, etc. IS

§4.6 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten die Aussagen

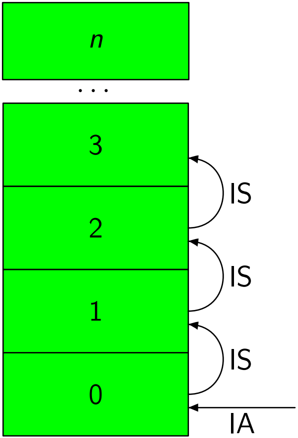
- Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
- Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n((n \in \mathbb{N}) \to (F(n) \to F(n+1)))$$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x((x \in \mathbb{N}) \to F(x))$

Notizen:

- $F(0)$ gilt offensichtlich gem. Induktionsanfang IA
- daraus folgt gem. Induktionsschritt dann $F(1)$ IS
- woraus gem. Induktionsschritt $F(2)$ folgt, etc. IS
- im Induktionsschritt (IS) heißen:
  - $F(n)$ die Induktionshypothese (IH) oder -voraussetzung
  - $F(n+1)$ die Induktionsbehauptung (IB)


n
...
3
2
1
0
IS
IS
IS
IA

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && \text{(IH)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && \text{(IH)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && \text{(IH)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && \text{(IH)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

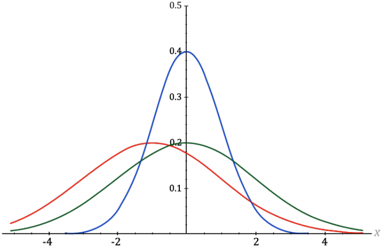
Beispiel (Summenformel von Gauß)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \qquad \text{(IH)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Carl Friedrich Gauß (* 1777; † 1855)

- dtsch. Mathematiker, Astronom und Physiker
- Integralsätze & Glockenkurve
- Formel zur Berechnung von Ostern



Theorem (§4.5)

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis (genauer in Übung).

per vollständiger Induktion über $|M|$:

IA: Die einzige Menge M mit $|M| = 0$ ist $M = \emptyset$. Zusätzlich $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$.

Mengenlehre — Potenzmenge

Theorem (§4.5)

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis (genauer in Übung).

per vollständiger Induktion über $|M|$:

IA: Die einzige Menge M mit $|M| = 0$ ist $M = \emptyset$. Zusätzlich $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$.

IS: Sei M eine Menge, so dass $|M| = n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x \in M$ beliebig. Dann ist

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M \setminus \{x\}) \cup \{N \cup \{x\} \mid N \in \mathcal{P}(M \setminus \{x\})\}$$

Theorem (§4.5)

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis (genauer in Übung).

per vollständiger Induktion über $|M|$:

IA: Die einzige Menge M mit $|M| = 0$ ist $M = \emptyset$. Zusätzlich $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$.

IS: Sei M eine Menge, so dass $|M| = n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x \in M$ beliebig. Dann ist

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M \setminus \{x\}) \cup \{N \cup \{x\} \mid N \in \mathcal{P}(M \setminus \{x\})\}$$

Unter Beachtung der Disjunktheit (nächste Folie) gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2 \cdot 2^{|M|-1} = 2^{|M|} \quad ,$$

wobei $|\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2^{|M|-1}$ per Induktionshypothese gilt $\square$

§4.7 Definition

Zwei Mengen M und N sind disjunkt gdw. $M \cap N = \emptyset$

Mengenlehre — weitere Rechenregeln

§4.7 Definition

Zwei Mengen M und N sind disjunkt gdw. $M \cap N = \emptyset$

Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 4, 6\}$ sind nicht disjunkt
- $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind disjunkt

Mengenlehre — weitere Rechenregeln

§4.7 Definition

Zwei Mengen M und N sind disjunkt gdw. $M \cap N = \emptyset$

Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 4, 6\}$ sind nicht disjunkt
- $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind disjunkt

§4.8 Theorem (Beweis in der Übung)

Für alle endlichen Mengen M und N gilt

$$\max(|M|, |N|) \leq |M \cup N| \overset{(\ddagger)}{\leq} |M| + |N| \quad ,$$

mit Gleichheit bei $(\ddagger)$ gdw. M und N disjunkt sind.

Zwischenfrage

Frage

Formulieren Sie das entsprechende Resultat für den Schnitt!

$$\ldots \leq |M \cap N| \leq \ldots$$

Zwischenfrage

Frage

Formulieren Sie das entsprechende Resultat für den Schnitt!

$$\ldots \leq |M \cap N| \leq \ldots$$

$$0 \leq |M \cap N| \leq \min(|M|, |N|)$$

Relationen — Motivation

Frage:

- Wer hat mehr als 1.000 Facebook-Freunde?
- Wer hat zwischen 100 und 1.000 Facebook-Freunde?
- Wer hat zwischen 0 und 100 Facebook-Freunde?
- Wer nutzt Facebook gar nicht?

Frage:

- Wer hat mehr als 1.000 Facebook-Freunde?
- Wer hat zwischen 100 und 1.000 Facebook-Freunde?
- Wer hat zwischen 0 und 100 Facebook-Freunde?
- Wer nutzt Facebook gar nicht?

Repräsentation

Wie kann man die Freundschaften erfassen?

- speichere zu jedem Mitglied seine Freunde → sehr ineffizient

→ speichere als Menge von Beziehungen

§4.9 Definition (Mengenprodukt)

Für alle Mengen M und N ist das (kartesische) Produkt $M \times N$ definiert durch

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M,\ n \in N\} ,$$

die Menge aller Paare von Elementen aus M und N.

§4.9 Definition (Mengenprodukt)

Für alle Mengen M und N ist das (kartesische) Produkt $M \times N$ definiert durch

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M,\ n \in N\} ,$$

die Menge aller Paare von Elementen aus M und N.

Notizen:

- $\{m,\ n\}$ heißt Menge mit Elementen m und n
- (m, n) heißt (geordnetes) Paar oder Sequenz
- Reihenfolge relevant; $(m, n) \neq (n, m)$, falls $m \neq n$

Beispiele

- sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{1, 3\}$

$$M \times N = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

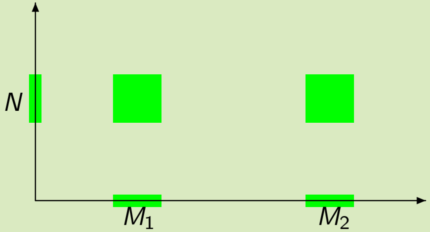
Beispiele

- sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{1, 3\}$

$$M \times N = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

- seien $M_1 = [2,3]$, $M_2 = [6,7]$ und $N = [2,3]$

$$(M_1 \cup M_2) \times N =$$



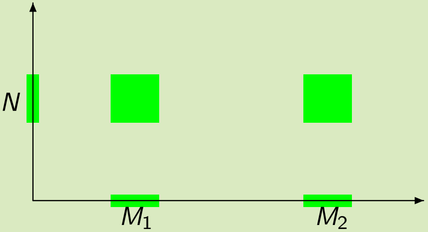
Beispiele

- sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{1, 3\}$

$$M \times N = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

- seien $M_1 = [2,3]$, $M_2 = [6,7]$ und $N = [2,3]$

$(M_1 \cup M_2) \times N =$



- sei F die Menge der Facebook-Nutzer

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

§4.10 Definition (Relation)

Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

§4.10 Definition (Relation)

Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

§4.10 Definition (Relation)

Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

- $\leq \, = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist Relation auf $\mathbb{N}$

§4.10 Definition (Relation)

Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

Beispiele

- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$

§4.10 Definition (Relation)

Eine Relation R von M nach N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
Ist $M = N$, so heißt R auch Relation auf M.

Beispiele

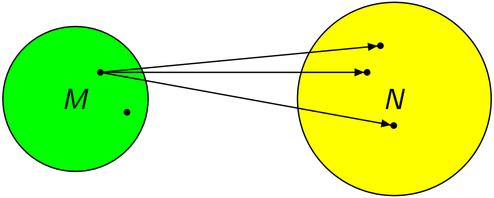
- sei B die Menge der Bundesbürger; Relation von B nach $\mathbb{N}$

$$\{(p, n) \in B \times \mathbb{N} \mid p \text{ hat Identifikationsnummer } n\}$$

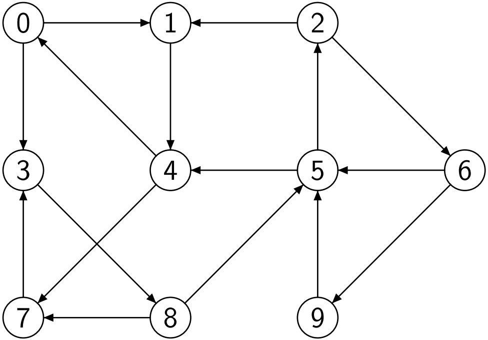
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ ist Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$
- Freund-Relation auf den Facebook-Nutzern F

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist Facebook-Freund von } y\}$$

Relation von M nach N (Elemente unbenannt):



Relation auf $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (Elemente benannt):



$\{(0,1), (0,3), (1,4), (2,1), (2,6), (3,8), (4,0), (4,7),$
$(5,2), (5,4), (6,5), (6,9), (7,3), (8,5), (8,7), (9,5)\}$

Relationen — Grundlagen

Notation: Sei R eine Relation von M nach N

- statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m \; R \; n$ oder $R(m, n)$

  Mittelposition insb. für nicht-alphanumerische Zeichen wie $\leq$

- statt $(m, n) \notin R$ schreiben wir auch $m \not R \; n$

  insb. für nicht-alphanumerische Zeichen wie $=$

Notation: Sei R eine Relation von M nach N

- statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m\ R\ n$ oder $R(m, n)$

  Mittelposition insb. für nicht-alphanumerische Zeichen wie $\leq$
- statt $(m, n) \notin R$ schreiben wir auch $m \not R\ n$

  insb. für nicht-alphanumerische Zeichen wie $=$
- wir nehmen an, dass Relationszeichen stärker binden als die logischen Junktoren (Verknüpfer)

$$(x \leq y \ \wedge\ y \leq x) \ \rightarrow\ x = y$$

heißt $$((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \rightarrow (x = y)$$

Notation: Sei R eine Relation von M nach N

- statt $(m, n) \in R$ schreiben wir auch $m\ R\ n$ oder $R(m, n)$

  Mittelposition insb. für nicht-alphanumerische Zeichen wie $\leq$
- statt $(m, n) \notin R$ schreiben wir auch $m \not R\ n$

  insb. für nicht-alphanumerische Zeichen wie $=$
- wir nehmen an, dass Relationszeichen stärker binden als die logischen Junktoren (Verknüpfer)

$$(x \leq y \ \wedge\ y \leq x) \ \rightarrow\ x = y$$

heißt $$((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \rightarrow (x = y)$$

- ebenso lassen wir evtl. äußere Klammern um $(x, y) \in R$ weg

§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

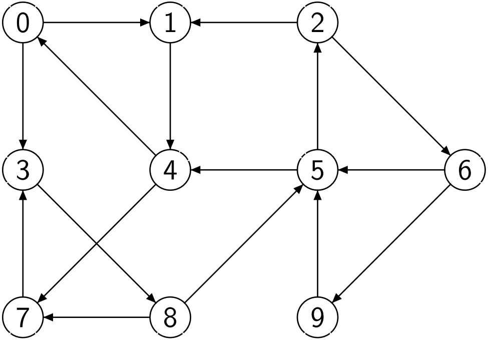
- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to (x, x) \in R)$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to (x, x) \notin R)$

§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

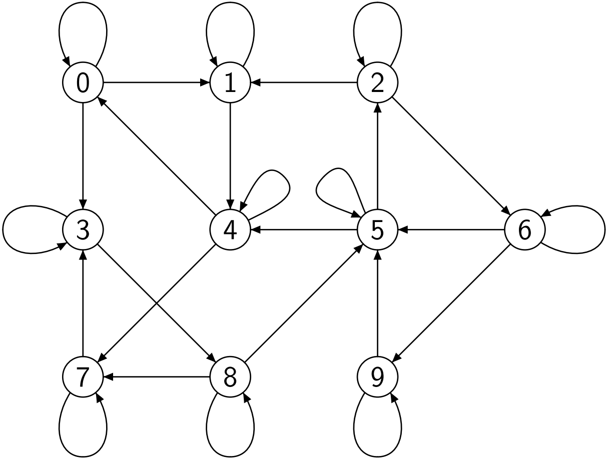
Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \rightarrow R(x, x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \rightarrow \neg R(x, x))$

irreflexiv (keine Schleifen) und reflexiv (alle Schleifen)



irreflexiv (keine Schleifen) und reflexiv (alle Schleifen)



§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

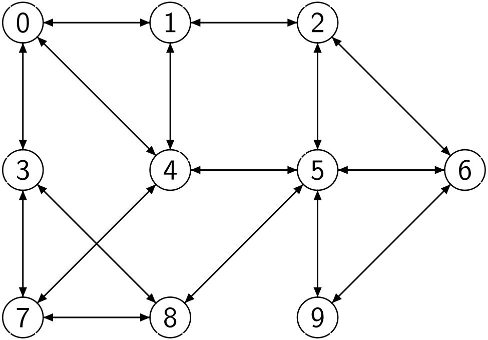
- reflexiv gdw. $\forall x (x \in M \to R(x, x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x (x \in M \to \neg R(x, x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y \big((x, y) \in R \to (y, x) \in R\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y \Big(\big((x, y) \in R \land (y, x) \in R\big) \to x = y\Big)$

§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

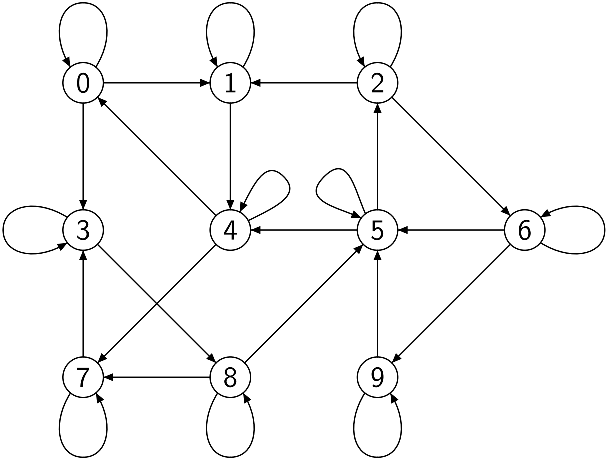
Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x,y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x,y\Big(\big(R(x,y) \land R(y,x)\big) \to x = y\Big)$

symmetrisch (wenn Pfeil, dann beidseitig) und
antisymmetrisch (beidseitige Pfeile nur bei Schleifen)



symmetrisch (wenn Pfeil, dann beidseitig) und
antisymmetrisch (beidseitige Pfeile nur bei Schleifen)



§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x,y) \land R(y,x)\big) \to x = y\Big)$
- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big((x,y) \in R \land (y,z) \in R\big) \to (x,z) \in R\Big)$

§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x,y) \land R(y,x)\big) \to x = y\Big)$
- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big(R(x,y) \land R(y,z)\big) \to R(x,z)\Big)$

§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

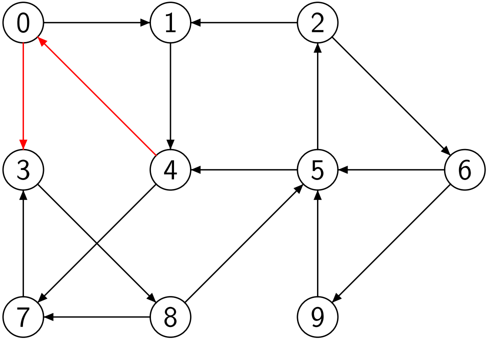
- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x,x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x,x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x,y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x,y\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \to x = y\Big)$
- transitiv gdw. $\forall x,y,z\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,z)\big) \to R(x,z)\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x,y\Big((x \in M \wedge y \in M) \to \big((x,y) \in R \vee (y,x) \in R\big)\Big)$

§4.11 Definition (Eigenschaften einer Relation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M heißt

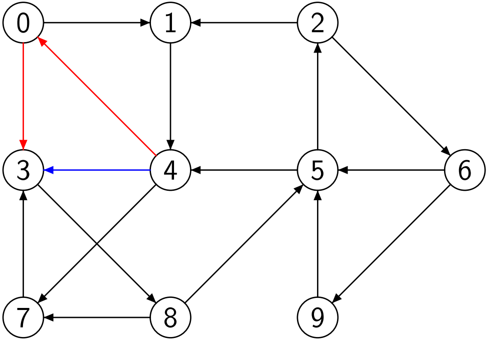
- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to R(x, x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \to \neg R(x, x))$
- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x, y) \to R(y, x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x, y) \wedge R(y, x)\big) \to x = y\Big)$
- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big(R(x, y) \wedge R(y, z)\big) \to R(x, z)\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x, y\Big((x \in M \wedge y \in M) \to \big(R(x, y) \vee R(y, x)\big)\Big)$

transitiv (für jede Kette existiert auch eine “Abkürzung”) und vollständig (mind. ein Pfeil zwischen 2 Elementen)



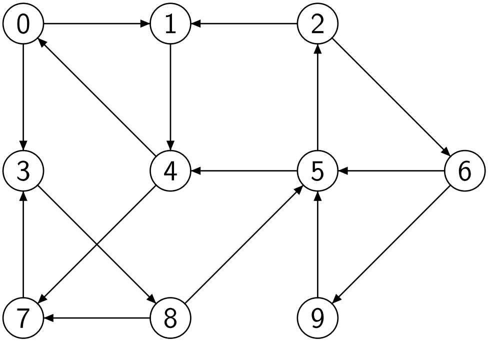
(diese Relationen sind also nicht transitiv und nicht vollständig)

transitiv (für jede Kette existiert auch eine “Abkürzung”) und
vollständig (mind. ein Pfeil zwischen 2 Elementen)



(diese Relationen sind also nicht transitiv und nicht vollständig)

transitiv (für jede Kette existiert auch eine “Abkürzung”) und
vollständig (mind. ein Pfeil zwischen 2 Elementen)



(diese Relationen sind also nicht transitiv und nicht vollständig)

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \,=\, \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \,=\, \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\ = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\ = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv				
irreflexiv				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗			
irreflexiv				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\, = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\, = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓		
irreflexiv				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	
irreflexiv				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\, = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\, = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv				
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓			
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\, = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\, = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗		
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\ = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\ = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch				
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓			
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗		
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \,=\, \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \,=\, \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch				
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\, = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\, = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓			
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓		
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\ = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\ = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	
transitiv				
vollständig				

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv				
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓			
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓		
vollständig				

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\, = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \,= \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq\; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $=\; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig				

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗			

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓		

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓	✗	

Relationen — Eigenschaften

Beispiele

- $\emptyset$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\leq \; = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ Relation auf $\mathbb{N}$
- $= \; = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$
- $\subseteq$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(M)$ mit $|M| \geq 2$

Eigenschaft \ Relation	$\emptyset$	$\leq$	$=$	$\subseteq$
reflexiv	✗	✓	✓	✓
irreflexiv	✓	✗	✗	✗
symmetrisch	✓	✗	✓	✗
antisymmetrisch	✓	✓	✓	✓
transitiv	✓	✓	✓	✓
vollständig	✗	✓	✗	✗

Relationen — Operationen

Notizen:

- Relationen sind spezielle Mengen
- alle Mengenoperationen auch auf Relationen anwendbar
  (Vereinigung, Schnitt, Differenz, Komplement)

Relationen — Operationen

Notizen:

- Relationen sind spezielle Mengen
- alle Mengenoperationen auch auf Relationen anwendbar
  (Vereinigung, Schnitt, Differenz, Komplement)
- spezielle Struktur liefert neue Operationen

§4.12 Definition (Inverse Relation, Komposition)

Seien $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$ Relationen.

- Die inverse Relation R^{-1} von R ist definiert durch

  (Tausch der Komponenten; Umkehr der Pfeile)

$$R^{-1} = \{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}$$

§4.12 Definition (Inverse Relation, Komposition)

Seien $R \subseteq M \times N$ und $R' \subseteq N \times P$ Relationen.

- Die inverse Relation R^{-1} von R ist definiert durch

  (Tausch der Komponenten; Umkehr der Pfeile)

  $$R^{-1} = \{(n, m) \in N \times M \mid (m, n) \in R\}$$

- Die Komposition von R gefolgt von R', geschrieben als $R \,;\, R'$, ist definiert durch (auch Verkettung)

  $$R \,;\, R' = \big\{(m, p) \in M \times P \mid \exists n\big(n \in N \land R(m, n) \land R'(n, p)\big)\big\}$$

Beispiel — Inverses

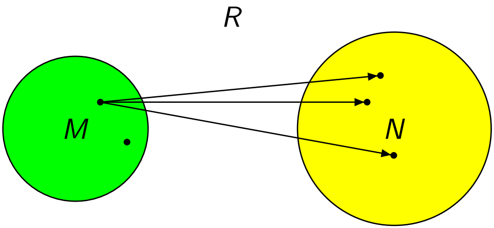
- sei $R = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$

$$R^{-1} = \{(1,1),\ (3,1),\ (2,2),\ (4,2),\ (2,3)\}$$

Beispiel — Inverses

- sei $R = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$

$$R^{-1} = \{(1,1),\ (3,1),\ (2,2),\ (4,2),\ (2,3)\}$$

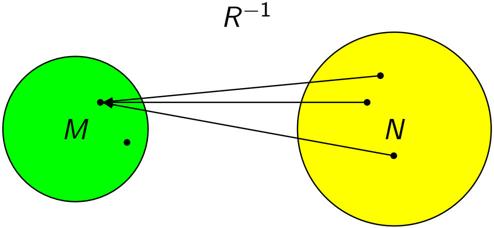


Relationen — Operationen

Beispiel — Inverses

- sei $R = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$

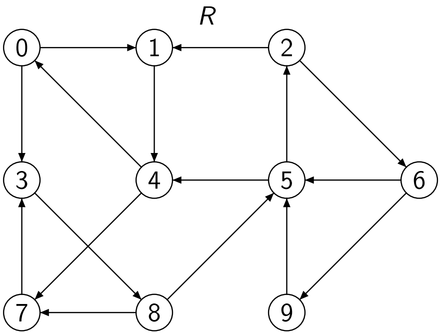
$$R^{-1} = \{(1,1),\ (3,1),\ (2,2),\ (4,2),\ (2,3)\}$$



Beispiel — Inverses

- sei $R = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$

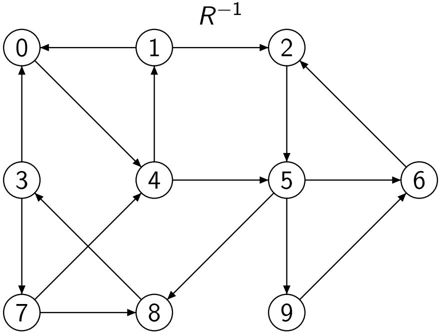
$$R^{-1} = \{(1,1),\ (3,1),\ (2,2),\ (4,2),\ (2,3)\}$$



Beispiel — Inverses

- sei $R = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2)\}$

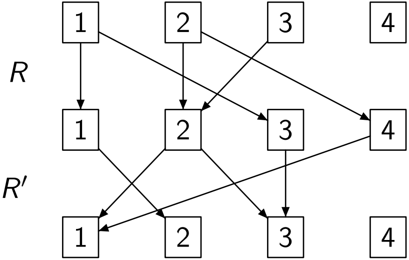
$$R^{-1} = \{(1,1),\ (3,1),\ (2,2),\ (4,2),\ (2,3)\}$$



Beispiel — Komposition

- seien $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,2)\}$
  und $R' = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,3), (4,1)\}$

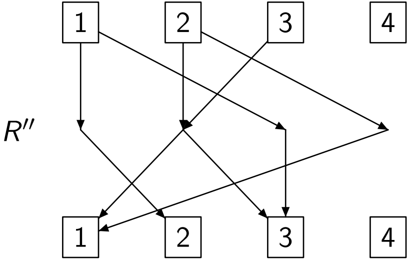
$$R'' = R \,;\, R' = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$



Beispiel — Komposition

- seien $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,2)\}$
  und $R' = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,3), (4,1)\}$

$$R'' = R\,;R' = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$



§4.13 Definition (spezielle Relationen)

Für jede Menge M existieren folgende Relationen auf M:

- die leere Relation $\emptyset$
- die Identität $\mathrm{id}_M = \{(m, m) \mid m \in M\}$
- die Allrelation $M \times M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \rightarrow (x, x) \in R)$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \rightarrow (x, x) \notin R)$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x(x \in M \rightarrow R(x, x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x(x \in M \rightarrow \neg R(x, x))$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- reflexiv gdw. $\forall x (x \in M \to R(x, x))$
- irreflexiv gdw. $\forall x (x \in M \to \neg R(x, x))$

§4.14 Theorem

Eine Relation R auf M ist

- reflexiv gdw. $\mathrm{id}_M \subseteq R$
- irreflexiv gdw. $\mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R\big) \rightarrow x = y\Big)$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x, y) \to R(y, x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x, y) \land R(y, x)\big) \to x = y\Big)$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- symmetrisch gdw. $\forall x, y\big(R(x, y) \to R(y, x)\big)$
- antisymmetrisch gdw. $\forall x, y\Big(\big(R(x, y) \land R(y, x)\big) \to x = y\Big)$

§4.16 Theorem

Eine Relation R auf M ist

- symmetrisch gdw. $R \subseteq R^{-1}$
- antisymmetrisch gdw. $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_M$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\big) \rightarrow (x, z) \in R\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x, y\big((x \in M \wedge y \in M) \rightarrow \big((x, y) \in R \vee (y, x) \in R\big)\big)$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,z)\big) \to R(x,z)\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x, y((x \in M \wedge y \in M) \to \big(R(x,y) \vee R(y,x)\big))$

Definition (§4.11)

Eine Relation R auf M heißt

- transitiv gdw. $\forall x, y, z\Big(\big(R(x, y) \wedge R(y, z)\big) \to R(x, z)\Big)$
- vollständig gdw. $\forall x, y((x \in M \wedge y \in M) \to \big(R(x, y) \vee R(y, x)\big)$

§4.17 Theorem

Eine Relation R auf M ist

- transitiv gdw. $R ; R \subseteq R$
- vollständig gdw. $R \cup R^{-1} = M \times M$

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Relationen — Abschlussfragen

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv			
irreflexiv			
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓		
irreflexiv			
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	
irreflexiv			
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv			
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗		
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch			
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗		
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch			
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗		
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv			
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv	✓		
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv	✓	✓	
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv	✓	✓	✓
vollständig			

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv	✓	✓	✓
vollständig	✓		

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv	✓	✓	✓
vollständig	✓	✗	

Relationen:

- $G = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ ist mind. so groß wie } q\}$
- $N = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar und } n' \text{ ist gerade}\}$
- $A = \{(p, q) \in \text{Person} \times \text{Person} \mid p \text{ und } q \text{ haben das selbe Alter}\}$

Eigenschaft \ Relation	G	N	A
reflexiv	✓	✗	✓
irreflexiv	✗	✗	✗
symmetrisch	✗	✗	✓
antisymmetrisch	✗	✗	✗
transitiv	✓	✓	✓
vollständig	✓	✗	✗

Zusammenfassung

- Verallgemeinerung Vereinigung und Schnitt
- Potenzmenge
- Vollständige Induktion
- Einführung Relationen und deren Eigenschaften

Zweite Aufgabenserie bereits im AlmaWeb verfügbar