Diskrete Strukturen

Vorlesung 3: Naive Mengenlehre

30. Oktober 2018

Organisation

Prüfung:

- vorauss. am Freitag, den 22. Februar 2019 von 10–11 Uhr
  im AudiMax, HS 3, HS 9
- Abmeldungen noch bis zum 12. Januar 2019 möglich
- schriftlich, 60 min
- Hilfsmittel: nur ein beschriebenes oder bedrucktes DIN-A4-Blatt

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen
2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Prädikatenlogik — Beweisstrategien

- Strategie für den Allquantor $\forall x\, F$
  - Man nehme ein beliebiges (abstraktes) Element u des Universums an "Sei u ein beliebiges Element des Universums."
  - Man zeige F für u als Belegung von x

Prädikatenlogik — Beweisstrategien

- Strategie für den Allquantor $\forall x\, F$
  - Man nehme ein beliebiges (abstraktes) Element u des Universums an
    “Sei u ein beliebiges Element des Universums.”
  - Man zeige F für u als Belegung von x
  - Da u beliebig ist, können keine Eigenschaften von u genutzt werden
  - Ebenso müssen Fallunterscheidungen alle Möglichkeiten abdecken

Prädikatenlogik — Beweisstrategien

- Strategie für den Allquantor $\forall x\, F$
  - Man nehme ein beliebiges (abstraktes) Element u des Universums an
    "Sei u ein beliebiges Element des Universums."
  - Man zeige F für u als Belegung von x
  - Da u beliebig ist, können keine Eigenschaften von u genutzt werden
  - Ebenso müssen Fallunterscheidungen alle Möglichkeiten abdecken

- Strategie für den Existenzquantor $\exists x\, F$
  - Man wähle ein geeignetes (konkretes) Element u des Universums
  - Man zeige F für u als Belegung von x

Prädikatenlogik — Beweisstrategien

- Strategie für den Allquantor $\forall x\, F$
  - Man nehme ein beliebiges (abstraktes) Element u des Universums an
    "Sei u ein beliebiges Element des Universums."
  - Man zeige F für u als Belegung von x
  - Da u beliebig ist, können keine Eigenschaften von u genutzt werden
  - Ebenso müssen Fallunterscheidungen alle Möglichkeiten abdecken

- Strategie für den Existenzquantor $\exists x\, F$
  - Man wähle ein geeignetes (konkretes) Element u des Universums
  - Man zeige F für u als Belegung von x
  - Da u bekannt ist, können Eigenschaften von u genutzt werden

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \left(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

Beweisversuch.

Prädikatenlogik — Beweisstrategien

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n\, \exists m \left(\mathrm{Gerade}(m) \land (m > n)\right)$$

Beweisversuch.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Prädikatenlogik — Beweisstrategien

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \left(\mathrm{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

Beweisversuch.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Wir wählen $m = 2n$. (Elimination Existenzquantor)

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \, \Big(\mathrm{Gerade}(m) \land (m > n) \Big)$$

Beweisversuch.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Wir wählen $m = 2n$. (Elimination Existenzquantor)

Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade. (Eigenschaft m)

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \, \Big(\mathrm{Gerade}(m) \land (m > n) \Big)$$

Beweisversuch.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Wir wählen $m = 2n$. (Elimination Existenzquantor)

Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade. (Eigenschaft m)

Weiterhin sei $n > 0$, woraus $m - n = 2n - n = n > 0$ und damit $m > n$ folgen. (Annahme einer Eigenschaft von n nicht zulässig)

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \left(\mathsf{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \left(\mathrm{Gerade}(m) \land (m > n) \right)$$

Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Wir wählen $m = 2(n+1)$.

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n\, \exists m \Big(\mathrm{Gerade}(m) \wedge (m > n)\Big)$$

Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Wir wählen $m = 2(n+1)$.

Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade.

Beispielaussage

Für jede natürliche Zahl existiert eine echt größere gerade natürliche Zahl.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \exists m \left(\mathrm{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl.

Wir wählen $m = 2(n+1)$.

Dann ist m offenbar durch 2 teilbar und damit gerade.

Weiterhin gilt $m - n = 2(n+1) - n = n + 2 > 0$ und damit ist $m > n$. $\square$

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \exists m \Big(\mathrm{Gerade}(m) \wedge (m > n)\Big)$$

Noch ein Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n\, \exists m \Big(\mathrm{Gerade}(m) \land (m > n) \Big)$$

Noch ein Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Dann ist n entweder gerade oder ungerade.
(Eigenschaft aller natürlichen Zahlen)

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \exists m \left(\text{Gerade}(m) \wedge (m > n)\right)$$

Noch ein Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Dann ist n entweder gerade oder ungerade.
(Eigenschaft aller natürlichen Zahlen)

- Sei n gerade. Wir wählen $m = n + 2$. (Elimination Existenzquantor)

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \, \exists m \left(\text{Gerade}(m) \wedge (m > n) \right)$$

Noch ein Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Dann ist n entweder gerade oder ungerade.
(Eigenschaft aller natürlichen Zahlen)

- Sei n gerade. Wir wählen $m = n + 2$. (Elimination Existenzquantor)

  Dann ist m offenbar auch gerade und es gilt $m > n$.

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \exists m \Big(\mathrm{Gerade}(m) \wedge (m > n)\Big)$$

Noch ein Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Dann ist n entweder gerade oder ungerade.
(Eigenschaft aller natürlichen Zahlen)

- Sei n gerade. Wir wählen $m = n + 2$. (Elimination Existenzquantor)

  Dann ist m offenbar auch gerade und es gilt $m > n$.
- Sei n ungerade. Wir wählen $m = n + 1$. (Elimination Existenzquantor)

Formalisierung: (Universum natürliche Zahlen)

$$\forall n \exists m \Big(\mathrm{Gerade}(m) \land (m > n)\Big)$$

Noch ein Beweis.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. (Elimination Allquantor)

Dann ist n entweder gerade oder ungerade.
(Eigenschaft aller natürlichen Zahlen)

- Sei n gerade. Wir wählen $m = n + 2$. (Elimination Existenzquantor)

  Dann ist m offenbar auch gerade und es gilt $m > n$.
- Sei n ungerade. Wir wählen $m = n + 1$. (Elimination Existenzquantor)

  Dann ist m gerade und $m > n$.

Wir haben die Aussage in beiden Fällen gezeigt. $\square$

Heutige Vorlesung

- Einführung Mengenlehre
- Beziehungen zwischen Mengen (Gleichheit, Teilmengen)
- Standardoperationen auf Mengen
- Rechenregeln für Mengenoperationen

Bitte Fragen direkt stellen!

§3.1 Definition (Menge) — nach [Cantor, 1895]

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Die zusammengefassten Objekte heißen Elemente von M.

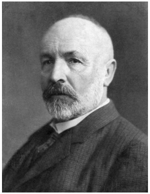
Notizen:

- verbale Definition $\rightarrow$ naive Mengenlehre
- führt zu Widersprüchen bei “großen” Mengen

Mengenlehre — Grundbegriffe

Georg Cantor (* 1845; † 1918)

- dtsch. Mathematiker
- Begründer der modernen Mengenlehre
- Kardinal- und Ordinalzahlen



§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

§3.2 Definition (Menge)

- Menge als Zusammenfassung von bestimmten Objekten (ihren Elementen)
- für jede Menge M und jedes Objekt m ist m entweder
  - ein Element von M $m \in M$
  - oder kein Element von M $\neg(m \in M)$ oder besser: $m \notin M$

§3.2 Definition (Menge)

- Menge als Zusammenfassung von bestimmten Objekten (ihren Elementen)
- für jede Menge M und jedes Objekt m ist m entweder
  - ein Element von M $\quad m \in M$
  - oder kein Element von M $\quad \neg(m \in M)$ oder besser: $m \notin M$
- "entweder … oder …" entspricht exklusivem Oder

$$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$$

§3.2 Definition (Menge)

- Menge als Zusammenfassung von bestimmten Objekten

  (ihren Elementen)

- für jede Menge M und jedes Objekt m ist m entweder
  - ein Element von M — $m \in M$
  - oder kein Element von M — $\neg(m \in M)$ oder besser: $m \notin M$
- "entweder ... oder ..." entspricht exklusivem Oder

$$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$$

- jede Menge ist unterscheidbar von jedem ihrer Elemente

  $\{3\} \neq 3$

Beispiele

- Menge aller Lastkraftwagen

Definition mit Eigenschaft

Beispiele

- Menge aller Lastkraftwagen

  Definition mit Eigenschaft

- Menge aller Lastkraftwagen,
  die (jetzt) frischen Fisch transportieren

  Einschränkung einer anderen Menge

Beispiele

- Menge aller Lastkraftwagen

  Definition mit Eigenschaft

- Menge aller Lastkraftwagen,
  die (jetzt) frischen Fisch transportieren

  Einschränkung einer anderen Menge

- Menge mit den Elementen 1, 2 und 3

  (vollständige) Aufzählung

Beispiele

- Menge aller Lastkraftwagen

  Definition mit Eigenschaft

- Menge aller Lastkraftwagen,
  die (jetzt) frischen Fisch transportieren

  Einschränkung einer anderen Menge

- Menge mit den Elementen 1, 2 und 3

  (vollständige) Aufzählung

- Menge mit den Elementen 0, 1, 2, usw.

  (unvollständige) Aufzählung

§3.3 Notation zur Definition von Mengen

- Leere Menge: $\emptyset$ hat keine Elemente
- Basismengen: sei Lkw die Menge aller Lastkraftwagen

textuelle Definition

§3.3 Notation zur Definition von Mengen

- Leere Menge: $\emptyset$ hat keine Elemente
- Basismengen: sei Lkw die Menge aller Lastkraftwagen

  textuelle Definition
- Einschränkung: $\{L \in \mathrm{Lkw} \mid \mathrm{hatFisch}(L)\}$
  enthält genau die Elemente L von Lkw,
  für die hatFisch(L) wahr ist

  $M = \{x \in X \mid F\}$ mit Aussagenschablone F

§3.3 Notation zur Definition von Mengen

- Leere Menge: $\emptyset$ hat keine Elemente
- Basismengen: sei Lkw die Menge aller Lastkraftwagen

  textuelle Definition
- Einschränkung: $\{L \in \mathrm{Lkw} \mid \mathrm{hatFisch}(L)\}$
  enthält genau die Elemente L von Lkw,
  für die hatFisch(L) wahr ist

  $M = \{x \in X \mid F\}$ mit Aussagenschablone F
- vollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$

  funktioniert nur bei endlichen Mengen

§3.3 Notation zur Definition von Mengen

- Leere Menge: $\emptyset$ hat keine Elemente
- Basismengen: sei Lkw die Menge aller Lastkraftwagen

  textuelle Definition
- Einschränkung: $\{L \in \mathrm{Lkw} \mid \mathrm{hatFisch}(L)\}$
  enthält genau die Elemente L von Lkw,
  für die hatFisch(L) wahr ist

  $M = \{x \in X \mid F\}$ mit Aussagenschablone F
- vollständige Aufzählung: $\{1, 2, 3\}$

  funktioniert nur bei endlichen Mengen
- unvollständige Aufzählung: $\{0, 1, 2, \ldots\}$

  Muster muss klar erkennbar sein

Notizen:

- Elemente unterscheidbar (Mehrfachnennungen unnütz)

$$\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} \qquad \text{und} \qquad \left\{0{,}5\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, 2 \cdot \frac{6}{24}\right\}$$

Notizen:

- Elemente unterscheidbar (Mehrfachnennungen unnütz)

$$\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} \qquad \text{und} \qquad \left\{0{,}5\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, 2 \cdot \frac{6}{24}\right\}$$

- nur Gruppierung; keine Anordnung (Reihenfolge irrelevant)

$$\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$$

Notizen:

- Elemente unterscheidbar (Mehrfachnennungen unnütz)

$$\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} \qquad \text{und} \qquad \left\{0{,}5\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, 2 \cdot \frac{6}{24}\right\}$$

- nur Gruppierung; keine Anordnung (Reihenfolge irrelevant)

$$\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$$

- dies gilt allg. für Mengen, nicht nur für Aufzählungen
- Klassiker: bei $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$

  formal: $(x \in \{1, 2, 3\}) \land (y \in \{1, 2, 3\}) \land (z \in \{1, 2, 3\})$

  kann $x = y = z$ gelten

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \in M$
- $\{\emptyset\} \in M$
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \in M$ ✓
- $\{\emptyset\} \in M$
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \in M$ ✓
- $\{\emptyset\} \in M$ ✓
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \in M$ ✓
- $\{\emptyset\} \in M$ ✓
- $\{\{\emptyset\}\} \in M$ ✗

§3.4 Definition (Mengengleichheit)

Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$,
wenn sie (exakt) die gleichen Elemente haben

Formal: $M = N$ gdw. $\forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \land \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$

§3.4 Definition (Mengengleichheit)

Mengen M und N sind gleich, kurz $M = N$,
wenn sie (exakt) die gleichen Elemente haben

Formal: $M = N$ gdw. $\forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big)$

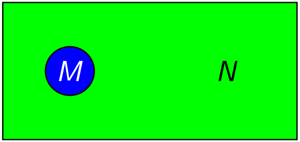
Beispiel

- $M_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$ — nat. Zahlen mit Teiler 2
- $G = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\}$ — gerade nat. Zahlen
- es gilt $M_2 = G$

§3.5 Definition (Teilmenge)

Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$, falls jedes Element von M auch Element von N ist

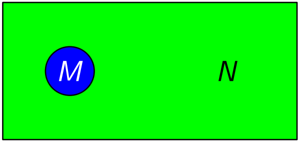
Formal: $M \subseteq N$ gdw. $\forall m((m \in M) \to (m \in N))$



§3.5 Definition (Teilmenge)

Menge M ist eine Teilmenge von der Menge N, kurz $M \subseteq N$,
falls jedes Element von M auch Element von N ist

Formal: $M \subseteq N$ gdw. $\forall m((m \in M) \to (m \in N))$



Beispiel

- $M_4 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 4 teilbar}\}$ nat. Zahlen mit Teiler 4
- $G = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Gerade}(n)\}$ gerade nat. Zahlen
- es gilt $M_4 \subseteq G$

Mengenlehre — Teilmenge

Notizen:

- Alternativen zu $M \subseteq N$ (M ist Teilmenge von N):
  - $N \supseteq M$ (N ist Obermenge von M)
  - manchmal auch: $M \subset N$ (werden wir nicht verwenden)

Notizen:

- Alternativen zu $M \subseteq N$ (M ist Teilmenge von N):
  - $N \supseteq M$ (N ist Obermenge von M)
  - manchmal auch: $M \subset N$ (werden wir nicht verwenden)
- Was bedeutet: $M \not\subseteq N$?

$$
\begin{array}{lll}
M \not\subseteq N & \text{ist äquivalent zu} & \neg(M \subseteq N) \\
 & \text{ist äquivalent zu} & \neg\forall m\big((m \in M) \rightarrow (m \in N)\big) \\
 & \text{ist äquivalent zu} & \exists m \neg\big((m \in M) \rightarrow (m \in N)\big) \\
 & \text{ist äquivalent zu} & \exists m \neg\big(\neg(m \in M) \vee (m \in N)\big) \\
 & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big(\neg\neg(m \in M) \wedge \neg(m \in N)\big) \\
 & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big((m \in M) \wedge (m \notin N)\big)
\end{array}
$$

in Worten: $M \not\subseteq N$ gdw. es ein Element m von M gibt, welches kein Element von N ist

Notizen:

- Alternativen zu $M \subseteq N$ (M ist Teilmenge von N):
  - $N \supseteq M$ (N ist Obermenge von M)
  - manchmal auch: $M \subset N$ (werden wir nicht verwenden)
- Was bedeutet: $M \not\subseteq N$?

$$\begin{aligned}
M \not\subseteq N \quad & \text{ist äquivalent zu} \quad \neg(M \subseteq N) \\
& \text{ist äquivalent zu} \quad \neg\forall m\big((m \in M) \rightarrow (m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} \quad \exists m\neg\big((m \in M) \rightarrow (m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} \quad \exists m\neg\big(\neg(m \in M) \vee (m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} \quad \exists m\big(\neg\neg(m \in M) \wedge \neg(m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} \quad \exists m\big((m \in M) \wedge (m \notin N)\big)
\end{aligned}$$

in Worten: $M \not\subseteq N$ gdw. es ein Element m von M gibt, welches kein Element von N ist

Notizen:

- Alternativen zu $M \subseteq N$ (M ist Teilmenge von N):
  - $N \supseteq M$ (N ist Obermenge von M)
  - manchmal auch: $M \subset N$ (werden wir nicht verwenden)
- Was bedeutet: $M \not\subseteq N$?

$$\begin{array}{lll} M \not\subseteq N & \text{ist äquivalent zu} & \neg(M \subseteq N) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \neg\forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\neg\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\neg\big(\neg(m \in M) \vee (m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big(\neg\neg(m \in M) \wedge \neg(m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big((m \in M) \wedge (m \notin N)\big) \end{array}$$

in Worten: $M \not\subseteq N$ gdw. es ein Element m von M gibt, welches kein Element von N ist

Notizen:

- Alternativen zu $M \subseteq N$ (M ist Teilmenge von N):
  - $N \supseteq M$ (N ist Obermenge von M)
  - manchmal auch: $M \subset N$ (werden wir nicht verwenden)
- Was bedeutet: $M \not\subseteq N$?

$$
\begin{array}{lll}
M \not\subseteq N & \text{ist äquivalent zu} & \neg(M \subseteq N) \\
& \text{ist äquivalent zu} & \neg\forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} & \exists m\neg\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} & \exists m\neg\big(\neg(m \in M) \vee (m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big(\neg\neg(m \in M) \wedge \neg(m \in N)\big) \\
& \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big((m \in M) \wedge (m \notin N)\big)
\end{array}
$$

in Worten: $M \not\subseteq N$ gdw. es ein Element m von M gibt, welches kein Element von N ist

Notizen:

- Alternativen zu $M \subseteq N$ (M ist Teilmenge von N):
  - $N \supseteq M$ (N ist Obermenge von M)
  - manchmal auch: $M \subset N$ (werden wir nicht verwenden)
- Was bedeutet: $M \not\subseteq N$?

$$\begin{array}{lll} M \not\subseteq N & \text{ist äquivalent zu} & \neg(M \subseteq N) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \neg\forall m\big((m \in M) \rightarrow (m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\neg\big((m \in M) \rightarrow (m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\neg\big(\neg(m \in M) \vee (m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big(\neg\neg(m \in M) \wedge \neg(m \in N)\big) \\ & \text{ist äquivalent zu} & \exists m\big((m \in M) \wedge (m \notin N)\big) \end{array}$$

in Worten: $M \not\subseteq N$ gdw. es ein Element m von M gibt, welches kein Element von N ist

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \subseteq M$
- $\{\emptyset\} \subseteq M$
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq M$

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \subseteq M$ ✓
- $\{\emptyset\} \subseteq M$
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq M$

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \subseteq M$ ✓
- $\{\emptyset\} \subseteq M$ ✓
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq M$

Welche Aussagen gelten für $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

- $\emptyset \subseteq M$ ✓
- $\{\emptyset\} \subseteq M$ ✓
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq M$ ✓

§3.6 Theorem

Für alle Mengen M und N gilt: $M = N$ gdw. $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

§3.6 Theorem

Für alle Mengen M und N gilt: $M = N$ gdw. $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

Beweis (direkt).

Durch Einsetzen der Definitionen:

$$
\begin{array}{lll}
 & M = N & \\
\text{ist äq. zu} & \forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big) & \text{§3.4} \\
\text{ist äq. zu} & (M \subseteq N) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big) & \text{§3.5} \\
\text{ist äq. zu} & (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M) & \text{§3.5}
\end{array}
$$

$\square$

§3.6 Theorem

Für alle Mengen M und N gilt: $M = N$ gdw. $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

Beweis (direkt).

Durch Einsetzen der Definitionen:

$$
\begin{array}{lll}
 & M = N & \\
\text{ist äq. zu} & \forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big) & \text{§3.4} \\
\text{ist äq. zu} & (M \subseteq N) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big) & \text{§3.5} \\
\text{ist äq. zu} & (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M) & \text{§3.5}
\end{array}
$$

□

§3.6 Theorem

Für alle Mengen M und N gilt: $M = N$ gdw. $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

Beweis (direkt).

Durch Einsetzen der Definitionen:

$$\begin{array}{lll} & M = N & \\ \text{ist äq. zu} & \forall m\big((m \in M) \to (m \in N)\big) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big) & \text{§3.4} \\ \text{ist äq. zu} & (M \subseteq N) \wedge \forall n\big((n \in N) \to (n \in M)\big) & \text{§3.5} \\ \text{ist äq. zu} & (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M) & \text{§3.5} \end{array}$$

$\square$

Mengenlehre — Standardmengen

Beispiele

- $\emptyset = \{\}$ — leere Menge (hat keine Elemente)
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — natürlichen Zahlen (bei anderen Autoren auch ohne 0)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ — rationalen Zahlen (',' heißt "und" in Eigenschaften)
- $\mathbb{R} =$ Menge aller reellen Zahlen — reellen Zahlen

§3.7 Definition (Vereinigung, Schnitt, Differenz)

Seien M und N Mengen.

- Vereinigung $M \cup N$ von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M oder Element von N sind

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

§3.7 Definition (Vereinigung, Schnitt, Differenz)

Seien M und N Mengen.

- Vereinigung $M \cup N$ von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M oder Element von N sind

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

- Schnitt $M \cap N$ von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M und Element von N sind

$$M \cap N = \{x \mid x \in M, x \in N\} = \{x \in M \mid x \in N\}$$

§3.7 Definition (Vereinigung, Schnitt, Differenz)

Seien M und N Mengen.

- Vereinigung $M \cup N$ von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M oder Element von N sind

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

- Schnitt $M \cap N$ von M und N besteht aus den Elementen, die Element von M und Element von N sind

$$M \cap N = \{x \mid x \in M,\ x \in N\} = \{x \in M \mid x \in N\}$$

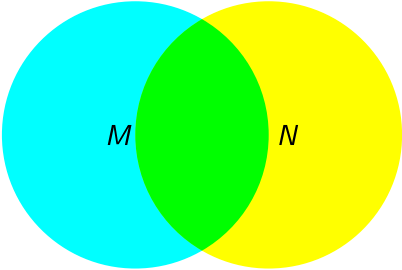
- Differenz $M \setminus N$ von M ohne N besteht aus den Elementen, die Element von M aber nicht Element von N sind

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M,\ x \notin N\} = \{x \in M \mid x \notin N\}$$

Mengenlehre — Grundoperationen

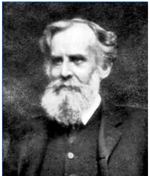
Grafische Darstellung

- Venn-Diagramme
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$



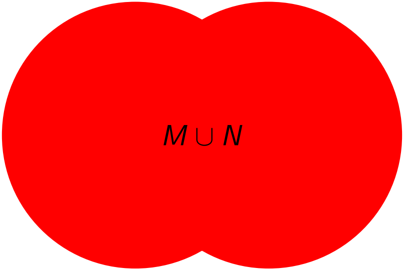
John Venn (* 1834; † 1923)

- engl. Mathematiker
- Lehrer der Logik in Cambridge



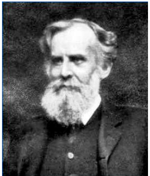
Grafische Darstellung

- Venn-Diagramme
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$



John Venn (* 1834; † 1923)

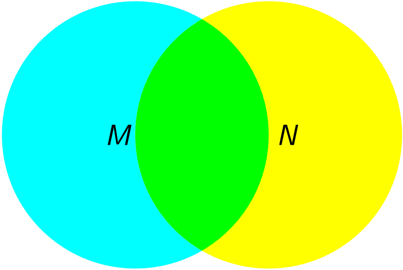
- engl. Mathematiker
- Lehrer der Logik in Cambridge



Mengenlehre — Grundoperationen

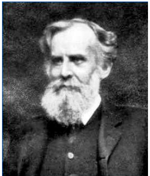
Grafische Darstellung

- Venn-Diagramme
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$



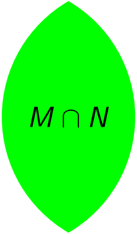
John Venn (* 1834; † 1923)

- engl. Mathematiker
- Lehrer der Logik in Cambridge



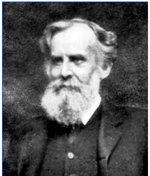
Grafische Darstellung

- Venn-Diagramme
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$



John Venn (* 1834; † 1923)

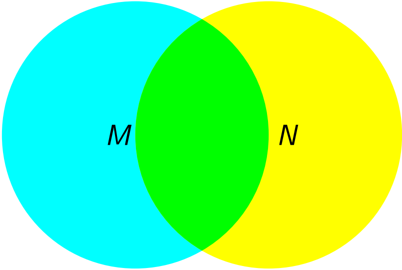
- engl. Mathematiker
- Lehrer der Logik in Cambridge



Mengenlehre — Grundoperationen

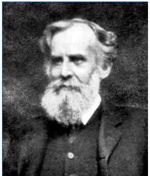
Grafische Darstellung

- Venn-Diagramme
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$



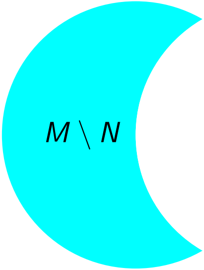
John Venn (* 1834; † 1923)

- engl. Mathematiker
- Lehrer der Logik in Cambridge



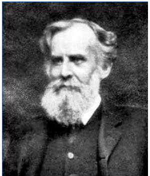
Grafische Darstellung

- Venn-Diagramme
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$



John Venn (* 1834; † 1923)

- engl. Mathematiker
- Lehrer der Logik in Cambridge

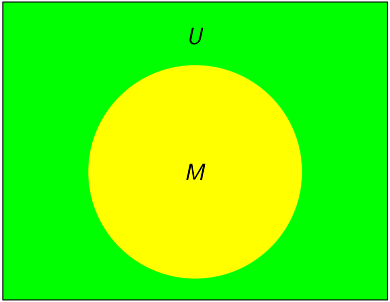


Grundmenge U (häufig implizit)

§3.8 Definition (Komplement)

Das Komplement M^c von $M \subseteq U$ beinhaltet genau die Elemente von U, die nicht Elemente von M sind.

$$M^c = \{u \in U \mid u \notin M\} = U \setminus M$$

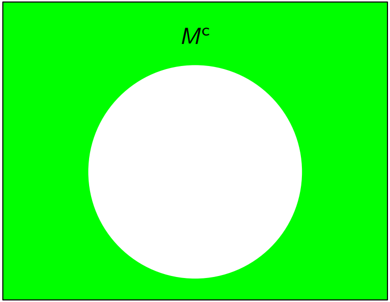


Grundmenge U (häufig implizit)

§3.8 Definition (Komplement)

Das Komplement M^c von $M \subseteq U$ beinhaltet genau die Elemente von U, die nicht Elemente von M sind.

$$M^c = \{u \in U \mid u \notin M\} = U \setminus M$$



§3.9 Theorem

1. $x \in \{y \mid F(y)\}$ gdw. $F(x)$
2. $x \notin M$ gdw. $x \in M^{c}$ Grundmenge U und $x \in U$

§3.9 Theorem

1. $x \in \{y \mid F(y)\}$ gdw. $F(x)$
2. $x \notin M$ gdw. $x \in M^c$ — Grundmenge U und $x \in U$

Beweis.

1. Beidseitige Implikationen

   ($\leftarrow$) Falls $F(x)$ gilt, dann auch $x \in \{y \mid F(y)\}$.

§3.9 Theorem

1. $x \in \{y \mid F(y)\}$ gdw. $F(x)$
2. $x \notin M$ gdw. $x \in M^c$ Grundmenge U und $x \in U$

Beweis.

1. Beidseitige Implikationen

   ($\leftarrow$) Falls $F(x)$ gilt, dann auch $x \in \{y \mid F(y)\}$.
   ($\rightarrow$) Falls $F(x)$ nicht gilt, dann gilt auch $x \notin \{y \mid F(y)\}$.
   Per Kontraposition gilt daher $F(x)$, falls $x \in \{y \mid F(y)\}$.

§3.9 Theorem

1. $x \in \{y \mid F(y)\}$ gdw. $F(x)$
2. $x \notin M$ gdw. $x \in M^c$ Grundmenge U und $x \in U$

Beweis.

1. Beidseitige Implikationen

   ($\leftarrow$) Falls $F(x)$ gilt, dann auch $x \in \{y \mid F(y)\}$.
   ($\rightarrow$) Falls $F(x)$ nicht gilt, dann gilt auch $x \notin \{y \mid F(y)\}$.
   Per Kontraposition gilt daher $F(x)$, falls $x \in \{y \mid F(y)\}$.

2. Beiseitige Implikationen

   ($\leftarrow$) Sei $x \in M^c = U \setminus M = \{y \mid y \in U,\ y \notin M\}$.
   Nach 1 gilt daher $x \in U$ und $x \notin M$.

§3.9 Theorem

1. $x \in \{y \mid F(y)\}$ gdw. $F(x)$
2. $x \notin M$ gdw. $x \in M^c$ — Grundmenge U und $x \in U$

Beweis.

1. Beidseitige Implikationen

   ($\leftarrow$) Falls $F(x)$ gilt, dann auch $x \in \{y \mid F(y)\}$.

   ($\rightarrow$) Falls $F(x)$ nicht gilt, dann gilt auch $x \notin \{y \mid F(y)\}$.
   Per Kontraposition gilt daher $F(x)$, falls $x \in \{y \mid F(y)\}$.

2. Beiseitige Implikationen

   ($\leftarrow$) Sei $x \in M^c = U \setminus M = \{y \mid y \in U, \, y \notin M\}$.
   Nach 1 gilt daher $x \in U$ und $x \notin M$.

   ($\rightarrow$) Sei $x \in U$ und $x \notin M$. Dann gilt nach 1 auch
   $x \in \{y \mid y \in U, y \notin M\} = U \setminus M = M^c$. □

äquivalente Formeln		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativität von $\wedge$
$A \vee B$	$B \vee A$	Kommutativität von $\vee$
$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \wedge B$	$B \wedge A$	Kommutativität von $\wedge$
$A \vee B$	$B \vee A$	Kommutativität von $\vee$
$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \vee B$	$B \vee A$	Kommutativität von $\vee$
$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität von $\wedge$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität von $\vee$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \wedge A$	A	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \vee A$	A	Idempotenz von $\vee$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$\neg\neg A$	A	Involution $\neg$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^c)^c$	A	Involution $\cdot^c$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\wedge$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^c)^c$	A	Involution $\cdot^c$
$(A \cap B)^c$	$A^c \cup B^c$	deMorgan-Gesetz für $\cap$
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	deMorgan-Gesetz für $\vee$

Mengenlehre — Rechenregeln

gleiche Mengen		Bezeichnung
$A \cap B$	$B \cap A$	Kommutativität von $\cap$
$A \cup B$	$B \cup A$	Kommutativität von $\cup$
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$	Assoziativität von $\cap$
$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$	Assoziativität von $\cup$
$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivität von $\cap$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivität von $\cup$
$A \cap A$	A	Idempotenz von $\cap$
$A \cup A$	A	Idempotenz von $\cup$
$(A^c)^c$	A	Involution $\cdot^c$
$(A \cap B)^c$	$A^c \cup B^c$	deMorgan-Gesetz für $\cap$
$(A \cup B)^c$	$A^c \cap B^c$	deMorgan-Gesetz für $\cup$

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beweis (direkt).

Durch Anwendung der Definitionen:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cap P) &= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\} \\
&= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\} \\
&= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\} && \text{§3.9} \\
&= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\} \\
&= \{x \mid (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} \\
&= (M \cup N) \cap (M \cup P)
\end{aligned}$$

□

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beweis (direkt).

Durch Anwendung der Definitionen:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cap P) &= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\} \\
&= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\} \\
&= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\} && \text{§3.9} \\
&= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\} \\
&= \{x \mid (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} \\
&= (M \cup N) \cap (M \cup P)
\end{aligned}$$

□

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beweis (direkt).

Durch Anwendung der Definitionen:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cap P) &= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\} \\
&= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\} \\
&= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\} && \S 3.9 \\
&= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\} \\
&= \{x \mid (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} \\
&= (M \cup N) \cap (M \cup P)
\end{aligned}$$

□

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beweis (direkt).

Durch Anwendung der Definitionen:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cap P) &= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in N \cap P)\} \\
&= \{x \mid (x \in M) \lor (x \in \{y \mid (y \in N) \land (y \in P)\})\} \\
&= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \lor (\underbrace{(x \in N)}_{B} \land \underbrace{(x \in P)}_{C})\} && \text{§3.9} \\
&= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in N)}_{B}) \land (\underbrace{(x \in M)}_{A} \lor \underbrace{(x \in P)}_{C})\} \\
&= \{x \mid (x \in M \cup N) \land (x \in M \cup P)\} \\
&= (M \cup N) \cap (M \cup P)
\end{aligned}$$

$\square$

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beweis (direkt).

Durch Anwendung der Definitionen:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cap P) &= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\} \\
&= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\} \\
&= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\} && \text{§3.9} \\
&= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\} \\
&= \{x \mid (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} \\
&= (M \cup N) \cap (M \cup P)
\end{aligned}$$

□

§3.10 Theorem

Für alle Mengen M, N, P gilt

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

Beweis (direkt).

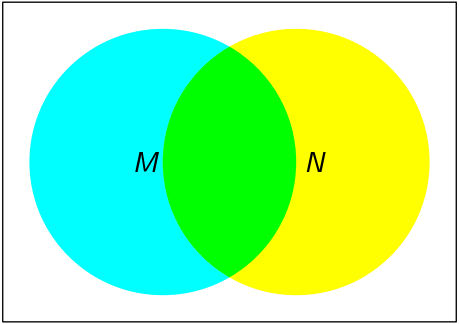
Durch Anwendung der Definitionen:

$$\begin{aligned}
M \cup (N \cap P) &= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N \cap P)\} \\
&= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in \{y \mid (y \in N) \wedge (y \in P)\})\} \\
&= \{x \mid \underbrace{(x \in M)}_{A} \vee (\underbrace{(x \in N)}_{B} \wedge \underbrace{(x \in P)}_{C})\} && \text{§3.9} \\
&= \{x \mid (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in N)}_{B}) \wedge (\underbrace{(x \in M)}_{A} \vee \underbrace{(x \in P)}_{C})\} \\
&= \{x \mid (x \in M \cup N) \wedge (x \in M \cup P)\} \\
&= (M \cup N) \cap (M \cup P)
\end{aligned}$$

□

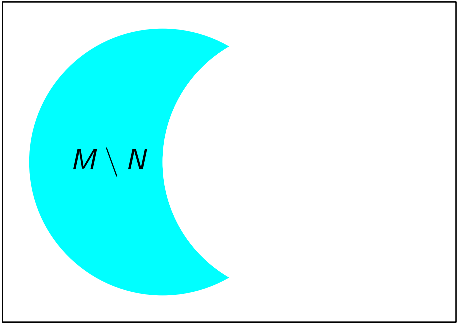
Vorsicht:

- Differenz '$\setminus$' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'



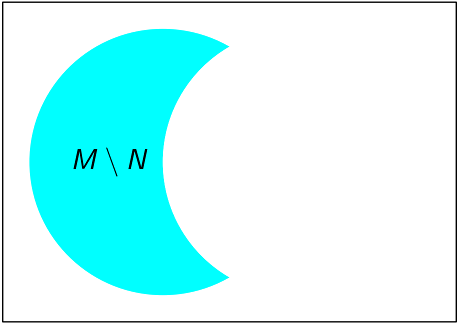
Vorsicht:

- Differenz '$\setminus$' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'



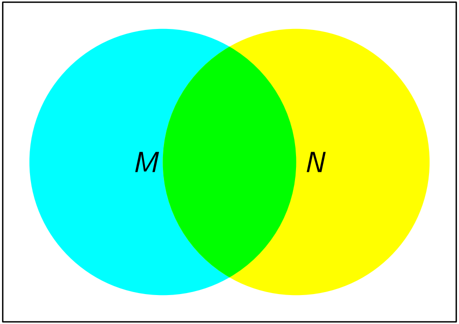
Vorsicht:

- Differenz '\' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'
- $A \rightarrow B$ gdw. $\neg A \vee B$
- wir betrachten also $M^c \cup N$



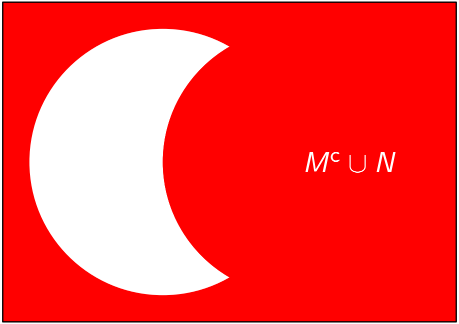
Vorsicht:

- Differenz '\' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'
- $A \rightarrow B$ gdw. $\neg A \vee B$
- wir betrachten also $M^c \cup N$



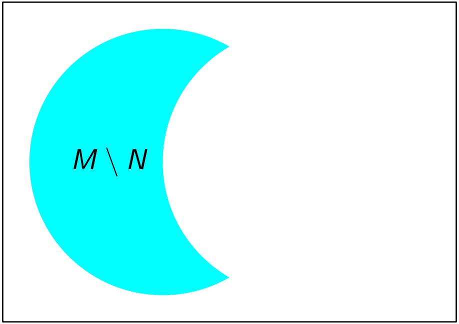
Vorsicht:

- Differenz '\' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'
- $A \rightarrow B$ gdw. $\neg A \vee B$
- wir betrachten also $M^c \cup N$



Vorsicht:

- Differenz '\' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'
- $A \rightarrow B$ gdw. $\neg A \vee B$
- wir betrachten also $M^c \cup N$



§3.11 Theorem

Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt:
(gemeinsame Grundmenge U — Universum)

$$M \setminus N = (M^c \cup N)^c$$

§3.11 Theorem

Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt:
(gemeinsame Grundmenge U — Universum)

$$M \setminus N = (M^c \cup N)^c$$

Beweis.

Wir wissen bereits: $(M^c \cup N)^c = (M^c)^c \cap N^c = M \cap N^c$.
Es bleibt *zu zeigen* (z.zg.): $M \setminus N = M \cap N^c$.

§3.11 Theorem

Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt:
(gemeinsame Grundmenge U — Universum)

$$M \setminus N = (M^c \cup N)^c$$

Beweis.

Wir wissen bereits: $(M^c \cup N)^c = (M^c)^c \cap N^c = M \cap N^c$.
Es bleibt *zu zeigen* (z.zg.): $M \setminus N = M \cap N^c$.

$$\begin{aligned} M \setminus N &= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\} \\ &= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N^c)\} && \text{§3.9} \\ &= M \cap N^c && \square \end{aligned}$$

Mengenlehre — weitere Eigenschaften

Universum U

klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow C$	Fallunterscheidung
$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$	*modus ponens*
$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Syllogismus (Transitivität von $\rightarrow$)
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Kontraposition
$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \rightarrow A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \rightarrow (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$	Fallunterscheidung
$(A \wedge (A \to B)) \to B$	*modus ponens*
$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	Syllogismus (Transitivität von $\to$)
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \to A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$	Fallunterscheidung
$(A \wedge (A \to B)) \to B$	*modus ponens*
$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	Syllogismus (Transitivität von $\to$)
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \to A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$(A \wedge (A \to B)) \to B$	*modus ponens*
$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	Syllogismus (Transitivität von $\to$)
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \to A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^{c} = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	Syllogismus (Transitivität von $\to$)
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \to A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$	Syllogismus (Transitivität von $\subseteq$)
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Kontraposition
$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \rightarrow A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \rightarrow (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Mengenlehre — weitere Eigenschaften

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \rightarrow (A \subseteq C)$	Syllogismus (Transitivität von $\subseteq$)
$(A \subseteq B)$ gdw. $(B^c \subseteq A^c)$	Kontraposition
$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \rightarrow A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \rightarrow (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Mengenlehre — weitere Eigenschaften

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$	Syllogismus (Transitivität von $\subseteq$)
$(A \subseteq B)$ gdw. $(B^c \subseteq A^c)$	Kontraposition
$(A \wedge B) \to A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$	Syllogismus (Transitivität von $\subseteq$)
$(A \subseteq B)$ gdw. $(B^c \subseteq A^c)$	Kontraposition
$(A \cap B) \subseteq A$	Abschwächung für $\cap$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$

Universum U

weitere Eigenschaften	Bezeichnung
$A \cup A^c = U$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \subseteq B) \land (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$	Syllogismus (Transitivität von $\subseteq$)
$(A \subseteq B)$ gdw. $(B^c \subseteq A^c)$	Kontraposition
$(A \cap B) \subseteq A$	Abschwächung für $\cap$
$A \subseteq (A \cup B)$	Abschwächung für $\cup$

Notizen:

- Jede Tautologie liefert die Universalmenge U
  beim Umschreiben von $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (nutze $A \rightarrow B$ äq. zu $\neg A \vee B$)

Notizen:

- Jede Tautologie liefert die Universalmenge U
  beim Umschreiben von $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (nutze $A \to B$ äq. zu $\neg A \vee B$)
  - Tautologie: $(A \wedge (A \to B)) \to B$ äq. zu $\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B$
  - für Mengen:

$$
\begin{aligned}
(A \cap (A^c \cup B))^c \cup B &= A^c \cup (A^c \cup B)^c \cup B \\
&= A^c \cup (A \cap B^c) \cup B \\
&= ((A^c \cup A) \cap (A^c \cup B^c)) \cup B \\
&= (U \cap (A^c \cup B^c)) \cup B \\
&= A^c \cup B^c \cup B \\
&= U
\end{aligned}
$$

Notizen:

- Jede Tautologie liefert die Universalmenge U beim Umschreiben von $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (nutze $A \to B$ äq. zu $\neg A \vee B$)
  - Tautologie: $(A \wedge (A \to B)) \to B$ äq. zu $\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B$
  - für Mengen:

$$\begin{aligned}
(A \cap (A^c \cup B))^c \cup B &= A^c \cup (A^c \cup B)^c \cup B \\
&= A^c \cup (A \cap B^c) \cup B \\
&= ((A^c \cup A) \cap (A^c \cup B^c)) \cup B \\
&= (U \cap (A^c \cup B^c)) \cup B \\
&= A^c \cup B^c \cup B \\
&= U
\end{aligned}$$

- Jede unerfüllbare Formel liefert die leere Menge $\emptyset$

§3.12 Theorem (Monotonie)

Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N') \qquad \text{und} \qquad (M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

§3.12 Theorem (Monotonie)

Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N') \qquad \text{und} \qquad (M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis (direkt).

- zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$:
  Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.

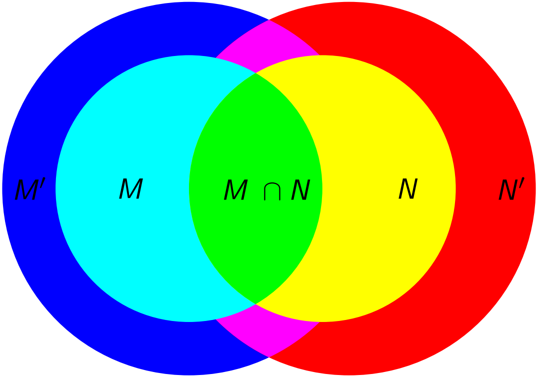
§3.12 Theorem (Monotonie)

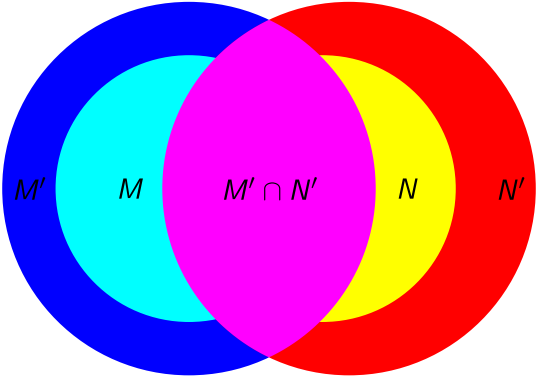
Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N') \qquad \text{und} \qquad (M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis (direkt).

- zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$:
  Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.
- zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$:
  Sei $x \in (M \cup N)$. Dann $x \in M$ oder $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgt $x \in M'$ oder $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cup N')$. □


M'
M
$M \cap N$
N
N'


M'
M
$M' \cap N'$
N
N'

§3.13 Theorem

Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $M \subseteq N$
2. $M \cap N = M$
3. $M \cup N = N$

§3.13 Theorem

Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $M \subseteq N$
2. $M \cap N = M$
3. $M \cup N = N$

Beweis.

Durch Äquivalenz zu 1: 1 äq. zu 2 und 1 äq. zu 3

Mengenlehre — weitere Eigenschaften

§3.13 Theorem

Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $M \subseteq N$
2. $M \cap N = M$
3. $M \cup N = N$

Beweis.

Durch Äquivalenz zu 1: 1 äq. zu 2 und 1 äq. zu 3

- zu 1 $\to$ 2 und 1 $\to$ 3: Da $M \subseteq N$ folgt durch Monotonie

$$M = M \cap M \subseteq M \cap N \quad \text{und} \quad M \cup N \subseteq N \cup N = N \qquad (\S3.12)$$

Trivialerweise $M \cap N \subseteq M$ und $N \subseteq M \cup N$.

§3.13 Theorem

Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $M \subseteq N$
2. $M \cap N = M$
3. $M \cup N = N$

Beweis.

Durch Äquivalenz zu 1: 1 äq. zu 2 und 1 äq. zu 3

- zu 1 → 2 und 1 → 3: Da $M \subseteq N$ folgt durch Monotonie

$$M = M \cap M \subseteq M \cap N \quad \text{und} \quad M \cup N \subseteq N \cup N = N \qquad (§3.12)$$

  Trivialerweise $M \cap N \subseteq M$ und $N \subseteq M \cup N$.

- zu 2 → 1 und 3 → 1:

$$M = M \cap N \subseteq N \qquad \text{und} \qquad M \subseteq M \cup N = N \qquad \square$$

Zusammenfassung

- Grundbegriffe und Definition von Mengen
- Mengengleichheit und Teilmengen
- Operationen für Mengen
- Operationen und Rechenregeln für Mengen

Zweite Aufgabenserie bereits im AlmaWeb verfügbar