Diskrete Strukturen

Vorlesung 2: Aussagen- und Prädikatenlogik

23. Oktober 2018

Organisation

- Bitte sowohl für das Modul, die Vorlesung und die Übung einschreiben
- Die Vorlesungs- und Übungsmaterialien finden Sie bei der Vorlesung
- Die Hausaufgaben werden vor der Vorlesung eingesammelt.
  Alternativ können Sie den Briefkasten in der Poststelle A514 nutzen.
  (Email bitte nur in besonderen Ausnahmefällen)

Organisation

- Bitte sowohl für das Modul, die Vorlesung und die Übung einschreiben
- Die Vorlesungs- und Übungsmaterialien finden Sie bei der Vorlesung
- Die Hausaufgaben werden vor der Vorlesung eingesammelt. Alternativ können Sie den Briefkasten in der Poststelle A514 nutzen. (Email bitte nur in besonderen Ausnahmefällen)

- Prüfungsabmeldungen noch bis zum 12. Januar 2019 möglich
- Wer noch nicht angemeldet ist, melde sich bitte dringend bei (AlmaWeb-Anmeldung unmöglich, Gasthörer, etc.)

Frau Güttler, Studienbüro, A510

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Grundlegende Beweistechniken
- Tautologien und Erfüllbarkeit
- Basiswissen Prädikatenlogik

Bitte Fragen direkt stellen!

Aussagenlogik — Notation

Wiederholung

$\neg$	Negation	nicht
$\wedge$	Konjunktion	und
$\vee$	Disjunktion	oder
$\rightarrow$	Implikation	wenn …, dann …
$\leftrightarrow$	beidseitige Implikation	… genau dann wenn …

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Aussagenlogik — Äquivalenz

Vorsicht: $F_1 = (A \to B) \to C$ und $F_2 = A \to (B \to C)$ sind nicht äquivalent

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	C	$A \to B$	F_1	$B \to C$	F_2
0	0	0	1	$\boxed{0}$	1	$\boxed{1}$
...	...	...	...	...	...	...

□

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht "$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$" ($A \leftarrow B$)
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht “$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$” $(A \leftarrow B)$
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent
- um $A \leftrightarrow B$ zu zeigen, reicht es $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zu zeigen

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht “$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$” $(A \leftarrow B)$
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent
- um $A \leftrightarrow B$ zu zeigen, reicht es $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zu zeigen

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

$$F = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

$\square$

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht "$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$" $(A \leftarrow B)$
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent
- um $A \leftrightarrow B$ zu zeigen, reicht es $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zu zeigen

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

$$F = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

□

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht “$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$” ($A \leftarrow B$)
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent
- um $A \leftrightarrow B$ zu zeigen, reicht es $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zu zeigen

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

$$F = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

□

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht "$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$" $(A \leftarrow B)$
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent
- um $A \leftrightarrow B$ zu zeigen, reicht es $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zu zeigen

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

$$F = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

□

§2.1 Beweisprinzip: beidseitige Implikationen

- Aussage $A \leftrightarrow B$ entspricht "$A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$" $(A \leftarrow B)$
- formal: $(A \leftrightarrow B)$ und $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ sind äquivalent
- um $A \leftrightarrow B$ zu zeigen, reicht es $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ zu zeigen

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

$$F = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

$\square$

§2.2 Äquivalenzen für $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

- $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent
- $A \leftrightarrow B$ und $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ sind äquivalent (siehe §2.1)

§2.2 Äquivalenzen für $\to$ und $\leftrightarrow$

- $A \to B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent
- $A \leftrightarrow B$ und $(A \to B) \wedge (B \to A)$ sind äquivalent (siehe §2.1)

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$\square$

§2.2 Äquivalenzen für $\to$ und $\leftrightarrow$

- $A \to B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent
- $A \leftrightarrow B$ und $(A \to B) \wedge (B \to A)$ sind äquivalent (siehe §2.1)

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

□

§2.2 Äquivalenzen für $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

- $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent
- $A \leftrightarrow B$ und $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ sind äquivalent (siehe §2.1)

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

□

§2.2 Äquivalenzen für $\to$ und $\leftrightarrow$

- $A \to B$ und $\neg A \vee B$ sind äquivalent
- $A \leftrightarrow B$ und $(A \to B) \wedge (B \to A)$ sind äquivalent (siehe §2.1)

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$\square$

§2.3 Substitutionsprinzip

- äquivalente Formeln können füreinander substituiert werden

$\rightarrow$ Beweisprinzip: Äquivalenzkette

Beispiel Äquivalenzkette

	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \wedge A$	
ist äquivalent zu	$A \wedge (B \vee C) \wedge A$	(Distributivität $\wedge$)
ist äquivalent zu	$A \wedge A \wedge (B \vee C)$	(Kommutativität $\wedge$)
ist äquivalent zu	$A \wedge (B \vee C)$	(Idempotenz $\wedge$)

§2.3 Substitutionsprinzip

- äquivalente Formeln können füreinander substituiert werden

$\rightarrow$ Beweisprinzip: Äquivalenzkette

Beispiel Äquivalenzkette

	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \wedge A$	
ist äquivalent zu	$A \wedge (B \vee C) \wedge A$	(Distributivität $\wedge$)
ist äquivalent zu	$A \wedge A \wedge (B \vee C)$	(Kommutativität $\wedge$)
ist äquivalent zu	$A \wedge (B \vee C)$	(Idempotenz $\wedge$)

§2.3 Substitutionsprinzip

- äquivalente Formeln können füreinander substituiert werden

$\rightarrow$ Beweisprinzip: Äquivalenzkette

Beispiel Äquivalenzkette

	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \wedge A$	
ist äquivalent zu	$A \wedge (B \vee C) \wedge A$	(Distributivität $\wedge$)
ist äquivalent zu	$A \wedge A \wedge (B \vee C)$	(Kommutativität $\wedge$)
ist äquivalent zu	$A \wedge (B \vee C)$	(Idempotenz $\wedge$)

§2.4 Beweisprinzip: Kontraposition

$A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ sind äquivalent
("wenn A, dann B" entspricht "wenn nicht B, dann nicht A")

§2.4 Beweisprinzip: Kontraposition

$A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ sind äquivalent
("wenn A, dann B" entspricht "wenn nicht B, dann nicht A")

Beweis mit Äquivalenzkette.

	$A \to B$	
ist äquivalent zu	$\neg A \vee B$	(§2.2)
ist äquivalent zu	$\neg A \vee \neg\neg B$	(Involution $\neg$)
ist äquivalent zu	$\neg\neg B \vee \neg A$	(Kommutativität $\vee$)
ist äquivalent zu	$\neg B \to \neg A$	(§2.2)

□

§2.4 Beweisprinzip: Kontraposition

$A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ sind äquivalent
("wenn A, dann B" entspricht "wenn nicht B, dann nicht A")

Beweis mit Äquivalenzkette.

$$
\begin{array}{lll}
 & A \to B & \\
\text{ist äquivalent zu} & \neg A \vee B & (\S 2.2) \\
\text{ist äquivalent zu} & \neg A \vee \neg\neg B & (\text{Involution } \neg) \\
\text{ist äquivalent zu} & \neg\neg B \vee \neg A & (\text{Kommutativität } \vee) \\
\text{ist äquivalent zu} & \neg B \to \neg A & (\S 2.2)
\end{array}
$$

□

§2.4 Beweisprinzip: Kontraposition

$A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ sind äquivalent
("wenn A, dann B" entspricht "wenn nicht B, dann nicht A")

Beweis mit Äquivalenzkette.

	$A \to B$	
ist äquivalent zu	$\neg A \vee B$	(§2.2)
ist äquivalent zu	$\neg A \vee \neg\neg B$	(Involution $\neg$)
ist äquivalent zu	$\neg\neg B \vee \neg A$	(Kommutativität $\vee$)
ist äquivalent zu	$\neg B \to \neg A$	(§2.2)

□

§2.4 Beweisprinzip: Kontraposition

$A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ sind äquivalent
("wenn A, dann B" entspricht "wenn nicht B, dann nicht A")

Beweis mit Äquivalenzkette.

	$A \to B$	
ist äquivalent zu	$\neg A \lor B$	(§2.2)
ist äquivalent zu	$\neg A \lor \neg\neg B$	(Involution $\neg$)
ist äquivalent zu	$\neg\neg B \lor \neg A$	(Kommutativität $\lor$)
ist äquivalent zu	$\neg B \to \neg A$	(§2.2)

$\square$

§2.5 Beispielaussage

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

§2.5 Beispielaussage

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Beweis durch Kontraposition.

Kontraposition von QuadratGerade $\rightarrow$ ZahlGerade:

$$\neg\text{ZahlGerade} \rightarrow \neg\text{QuadratGerade}$$

§2.5 Beispielaussage

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Beweis durch Kontraposition.

Kontraposition von QuadratGerade $\to$ ZahlGerade:

$$\neg\text{ZahlGerade} \to \neg\text{QuadratGerade}$$

Falls n nicht gerade ist, dann gilt $n = 2k + 1$ für eine ganze Zahl k und

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \ ,$$

§2.5 Beispielaussage

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Beweis durch Kontraposition.

Kontraposition von QuadratGerade $\to$ ZahlGerade:

$$\neg\text{ZahlGerade} \to \neg\text{QuadratGerade}$$

Falls n nicht gerade ist, dann gilt $n = 2k + 1$ für eine ganze Zahl k und

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \quad ,$$

womit n^2 wieder ungerade (nicht gerade) ist.

§2.5 Beispielaussage

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Beweis durch Kontraposition.

Kontraposition von QuadratGerade $\to$ ZahlGerade:

$$\neg\text{ZahlGerade} \to \neg\text{QuadratGerade}$$

Falls n nicht gerade ist, dann gilt $n = 2k + 1$ für eine ganze Zahl k und

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \ ,$$

womit n^2 wieder ungerade (nicht gerade) ist.

(nutzt auch Fachwissen und Implikationskette — siehe später) □

Aussagenlogik — Vereinfachung

- oft führt Vereinfachung der Formel zu besserem Verständnis
- dazu können die Äquivalenzen genutzt werden

- oft führt Vereinfachung der Formel zu besserem Verständnis
- dazu können die Äquivalenzen genutzt werden

Beispiel

	$\neg((\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \vee (\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE}))$
ist äquivalent zu	$\neg(\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \wedge \neg(\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE})$
ist äquivalent zu	$\neg\text{hatMilch} \wedge \neg\text{hatMilchE} \wedge \neg\text{hatFleisch} \wedge \neg\text{hatFleischE}$

Aussagenlogik — Vereinfachung

- oft führt Vereinfachung der Formel zu besserem Verständnis
- dazu können die Äquivalenzen genutzt werden

Beispiel

$$\begin{array}{ll} & \neg((\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \vee (\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE})) \\ \text{ist äquivalent zu} & \neg(\text{hatMilch} \vee \text{hatMilchE}) \wedge \neg(\text{hatFleisch} \vee \text{hatFleischE}) \\ \text{ist äquivalent zu} & \neg\text{hatMilch} \wedge \neg\text{hatMilchE} \wedge \neg\text{hatFleisch} \wedge \neg\text{hatFleischE} \end{array}$$

§2.6 Definition (Tautologie, Unerfüllbarkeit)

Eine Formel ist

- eine Tautologie, falls sie unabh. von der Belegung der Atome wahr ist
  (Tautologien sind immer wahr; kein Fachwissen notwendig)

§2.6 Definition (Tautologie, Unerfüllbarkeit)

Eine Formel ist

- eine Tautologie, falls sie unabh. von der Belegung der Atome wahr ist
  (Tautologien sind immer wahr; kein Fachwissen notwendig)
- unerfüllbar, falls sie unabh. von der Belegung der Atome falsch ist
  (unerfüllbare Formeln sind immer falsch) auch: Kontradiktion

§2.6 Definition (Tautologie, Unerfüllbarkeit)

Eine Formel ist

- eine Tautologie, falls sie unabh. von der Belegung der Atome wahr ist
  (Tautologien sind immer wahr; kein Fachwissen notwendig)
- unerfüllbar, falls sie unabh. von der Belegung der Atome falsch ist
  (unerfüllbare Formeln sind immer falsch) auch: Kontradiktion
- erfüllbar, falls sie nicht unerfüllbar ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel wahr ist)

§2.6 Definition (Tautologie, Unerfüllbarkeit)

Eine Formel ist

- eine Tautologie, falls sie unabh. von der Belegung der Atome wahr ist
  (Tautologien sind immer wahr; kein Fachwissen notwendig)
- unerfüllbar, falls sie unabh. von der Belegung der Atome falsch ist
  (unerfüllbare Formeln sind immer falsch) auch: Kontradiktion
- erfüllbar, falls sie nicht unerfüllbar ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel wahr ist)
- widerlegbar, falls sie keine Tautologie ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel falsch ist)

§2.6 Definition (Tautologie, Unerfüllbarkeit)

Eine Formel ist

- eine Tautologie, falls sie unabh. von der Belegung der Atome wahr ist
  (Tautologien sind immer wahr; kein Fachwissen notwendig)
- unerfüllbar, falls sie unabh. von der Belegung der Atome falsch ist
  (unerfüllbare Formeln sind immer falsch) auch: Kontradiktion
- erfüllbar, falls sie nicht unerfüllbar ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel wahr ist)
- widerlegbar, falls sie keine Tautologie ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel falsch ist)

Beispiele

- $(A \land A) \leftrightarrow A$ ist eine Tautologie (Idempotenz $\land$)

§2.6 Definition (Tautologie, Unerfüllbarkeit)

Eine Formel ist

- eine Tautologie, falls sie unabh. von der Belegung der Atome wahr ist
  (Tautologien sind immer wahr; kein Fachwissen notwendig)
- unerfüllbar, falls sie unabh. von der Belegung der Atome falsch ist
  (unerfüllbare Formeln sind immer falsch) auch: Kontradiktion
- erfüllbar, falls sie nicht unerfüllbar ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel wahr ist)
- widerlegbar, falls sie keine Tautologie ist
  (d.h. es gibt eine Belegung der Atome, so dass die Formel falsch ist)

Beispiele

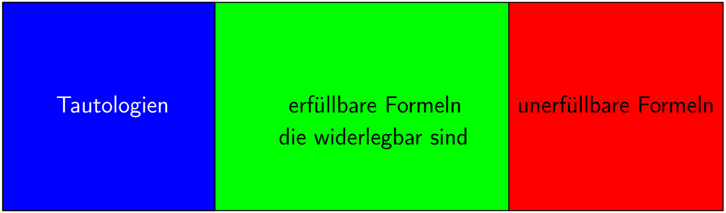
- $(A \wedge A) \leftrightarrow A$ ist eine Tautologie (Idempotenz $\wedge$)
- Gerade $\leftrightarrow \neg$Ungerade ist erfüllbar, aber auch widerlegbar
  (auch wenn diese Aussage mit Fachwissen wahr ist)

Aussagenlogik — Tautologien

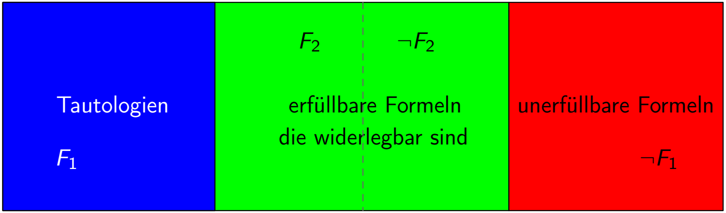
klassische Tautologien	Bezeichnung
$A \vee \neg A$	ausgeschlossenes Drittes
$((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$	Fallunterscheidung
$(A \wedge (A \to B)) \to B$	*modus ponens*
$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	Syllogismus (Transitivität von $\to$)
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$((\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)) \to A$	*reductio ad absurdum* (indirekter Beweis)
$(A \wedge B) \to A$	Abschwächung für $\wedge$
$A \to (A \vee B)$	Abschwächung für $\vee$
$A \leftrightarrow B$	für äquivalente Aussagen A und B


erfüllbare Formeln
unerfüllbare Formeln

Aussagenlogik — Tautologien



Aussagenlogik — Tautologien



§2.7 modus ponens

$F = (A \wedge (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und "wenn A, dann B", dann gilt auch B)

§2.7 modus ponens

$F = (A \wedge (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und "wenn A, dann B", dann gilt auch B)

Beweis mit Fallunterscheidung.

- falls B wahr ist, dann ist $F = \cdots \to B$ wahr

§2.7 modus ponens

$F = (A \land (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und "wenn A, dann B", dann gilt auch B)

Beweis mit Fallunterscheidung.

- falls B wahr ist, dann ist $F = \cdots \to B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
  - A wahr, womit $A \land (A \to B)$ falsch ist

Aussagenlogik — Schlusskette

§2.7 modus ponens

$F = (A \wedge (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und "wenn A, dann B", dann gilt auch B)

Beweis mit Fallunterscheidung.

- falls B wahr ist, dann ist $F = \cdots \to B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
  - A wahr, womit $A \wedge (A \to B)$ falsch ist
  - A falsch, womit $A \wedge (A \to B)$ auch falsch ist

§2.7 modus ponens

$F = (A \wedge (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie.

(gelten A und "wenn A, dann B", dann gilt auch B)

Beweis mit Fallunterscheidung.

- falls B wahr ist, dann ist $F = \cdots \to B$ wahr
- falls B falsch ist, dann ist entweder
  - A wahr, womit $A \wedge (A \to B)$ falsch ist
  - A falsch, womit $A \wedge (A \to B)$ auch falsch ist

Da $F' = A \wedge (A \to B)$ falsch ist, ist $F = F' \to B$ wahr $\square$

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

Beweis mit Kontraposition.

Kontraposition: $F = \neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \land (B \to C))}_{F'}$

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

Beweis mit Kontraposition.

Kontraposition: $F = \neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \wedge (B \to C))}_{F'}$

Fallunterscheidung:

- Falls $\neg(A \to C)$ falsch ist, dann ist F wahr.

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

Beweis mit Kontraposition.

Kontraposition: $F = \neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \land (B \to C))}_{F'}$

Fallunterscheidung:

- Falls $\neg(A \to C)$ falsch ist, dann ist F wahr.
- Falls $\neg(A \to C)$ wahr ist, dann ist $A \to C$ falsch, woraus A wahr und C falsch folgen

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

Beweis mit Kontraposition.

Kontraposition: $F = \neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \wedge (B \to C))}_{F'}$

Fallunterscheidung:

- Falls $\neg(A \to C)$ falsch ist, dann ist F wahr.
- Falls $\neg(A \to C)$ wahr ist, dann ist $A \to C$ falsch, woraus A wahr und C falsch folgen
  - Sei B falsch. Dann ist $A \to B$ falsch und damit F' wahr

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

Beweis mit Kontraposition.

Kontraposition: $F = \neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \wedge (B \to C))}_{F'}$

Fallunterscheidung:

- Falls $\neg(A \to C)$ falsch ist, dann ist F wahr.
- Falls $\neg(A \to C)$ wahr ist, dann ist $A \to C$ falsch, woraus A wahr und C falsch folgen
  - Sei B falsch. Dann ist $A \to B$ falsch und damit F' wahr
  - Sei B wahr. Dann ist $B \to C$ falsch und damit F' wahr

§2.8 Syllogismus (Schlusskette)

$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ ist eine Tautologie.

(Transitivität von $\to$)

Beweis mit Kontraposition.

Kontraposition: $F = \neg(A \to C) \to \underbrace{\neg((A \to B) \land (B \to C))}_{F'}$

Fallunterscheidung:

- Falls $\neg(A \to C)$ falsch ist, dann ist F wahr.
- Falls $\neg(A \to C)$ wahr ist, dann ist $A \to C$ falsch, woraus A wahr und C falsch folgen
  - Sei B falsch. Dann ist $A \to B$ falsch und damit F' wahr
  - Sei B wahr. Dann ist $B \to C$ falsch und damit F' wahr

Da F' wahr ist, ist auch F wahr $\square$

Notizen:

- Schlussregeln sind immer Tautologien
  z.B. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ — Kontraposition
- jede Tautologie ist erfüllbar

Notizen:

- Schlussregeln sind immer Tautologien
  z.B. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ — Kontraposition
- jede Tautologie ist erfüllbar

- Vorsicht mit der Negation:
  1. $\neg F$ ist unerfüllbar für jede Tautologie F
     ($\neg F$ ist für jede Belegung falsch)
  2. F kann erfüllbar sein, falls F keine Tautologie ist
     (F ist nicht für jede Belegung wahr)

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B))}_{F'} \rightarrow A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann,
dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B))}_{F'} \to A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann, dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	F'	$F' \to A$
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1

$\square$

Aussagenlogik — Indirekter Beweis

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \rightarrow B) \land (\neg A \rightarrow \neg B))}_{F'} \rightarrow A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann, dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	F'	$F' \rightarrow A$
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1

$\square$

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B))}_{F'} \rightarrow A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann, dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	F'	$F' \rightarrow A$
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1

□

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \to B) \land (\neg A \to \neg B))}_{F'} \to A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann, dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	F'	$F' \to A$
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1

$\square$

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B))}_{F'} \to A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann, dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	F'	$F' \to A$
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1

□

§2.9 Beweisprinzip: indirekter Beweis

$\underbrace{((\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B))}_{F'} \rightarrow A$ ist eine Tautologie.

in Worten: wenn man aus $\neg A$ einen Widerspruch ableiten kann, dann kann $\neg A$ nicht gelten und es muss A gelten

Beweis mit Wahrheitswertetabelle.

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A \rightarrow \neg B$	F'	$F' \rightarrow A$
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1

Offensichtlich gilt sogar, dass F' und A äquivalent sind $\square$

§2.10 Beispielaussage

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

§2.10 Beispielaussage

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

indirekter Beweis.

Sei x eine rationale Zahl, so dass $x^2 = 2$. (Negation der Aussage)

§2.10 Beispielaussage

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

indirekter Beweis.

Sei x eine rationale Zahl, so dass $x^2 = 2$. (Negation der Aussage)

Dann existieren teilerfremde ganze Zahlen m und n mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$.

§2.10 Beispielaussage

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

indirekter Beweis.

Sei x eine rationale Zahl, so dass $x^2 = 2$. (Negation der Aussage)

Dann existieren teilerfremde ganze Zahlen m und n mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$. Also $2n^2 = m^2$, womit m^2 gerade ist. Gemäß §2.5 ist somit auch m gerade, so dass $m = 2k$ für eine ganze Zahl k.

§2.10 Beispielaussage

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

indirekter Beweis.

Sei x eine rationale Zahl, so dass $x^2 = 2$. (Negation der Aussage)

Dann existieren teilerfremde ganze Zahlen m und n mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$. Also $2n^2 = m^2$, womit m^2 gerade ist. Gemäß §2.5 ist somit auch m gerade, so dass $m = 2k$ für eine ganze Zahl k.

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2$$

Also ist auch n^2 gerade und damit ist n gerade gemäß §2.5.

§2.10 Beispielaussage

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

indirekter Beweis.

Sei x eine rationale Zahl, so dass $x^2 = 2$. (Negation der Aussage)

Dann existieren teilerfremde ganze Zahlen m und n mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$. Also $2n^2 = m^2$, womit m^2 gerade ist. Gemäß §2.5 ist somit auch m gerade, so dass $m = 2k$ für eine ganze Zahl k.

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = 2k^2$$

Also ist auch n^2 gerade und damit ist n gerade gemäß §2.5.

Da m und n gerade sind, sind sie nicht teilerfremd (gemeinsamer Teiler 2). Es gibt also eine teilerfremde Darstellung und gleichzeitig kann es diese nicht geben. Widerspruch. Folglich gilt die Aussage. $\square$

Aussagenlogik — Indirekter Beweis

Beispielaussage (§2.10)

$\underbrace{\text{Es gibt keine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{A}$

Aussagenlogik — Indirekter Beweis

Beispielaussage (§2.10)

$\underbrace{\text{Es gibt keine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{A}$

Beweisstruktur.

$\underbrace{\text{Es existiert eine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{\neg A}$

$\underbrace{\text{Es existieren teilerfremde ganze Zahlen } m \text{ und } n \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } (\frac{m}{n})^2 = 2}_{B}$

Beispielaussage (§2.10)

$\underbrace{\text{Es gibt keine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{A}$

Beweisstruktur.

$\underbrace{\text{Es existiert eine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{\neg A}$

$\underbrace{\text{Es existieren teilerfremde ganze Zahlen } m \text{ und } n \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } (\frac{m}{n})^2 = 2}_{B}$

Wir zeigten zunächst $\neg A \to B$

Aussagenlogik — Indirekter Beweis

Beispielaussage (§2.10)

$\underbrace{\text{Es gibt keine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{A}$

Beweisstruktur.

$\underbrace{\text{Es existiert eine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{\neg A}$

$\underbrace{\text{Es existieren teilerfremde ganze Zahlen } m \text{ und } n \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } (\tfrac{m}{n})^2 = 2}_{B}$

Wir zeigten zunächst $\neg A \to B$ und danach $\neg B$

Beispielaussage (§2.10)

$\underbrace{\text{Es gibt keine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{A}$

Beweisstruktur.

$\underbrace{\text{Es existiert eine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{\neg A}$

$\underbrace{\text{Es existieren teilerfremde ganze Zahlen } m \text{ und } n \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } (\frac{m}{n})^2 = 2}_{B}$

Wir zeigten zunächst $\neg A \to B$ und danach $\neg B$

Damit gilt auch $\neg A \to \neg B$, da $\neg B$ wahr ist.

Beispielaussage (§2.10)

$\underbrace{\text{Es gibt keine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{A}$

Beweisstruktur.

$\underbrace{\text{Es existiert eine rationale Zahl } x \text{ mit } x^2 = 2.}_{\neg A}$

$\underbrace{\text{Es existieren teilerfremde ganze Zahlen } m \text{ und } n \text{ mit } n \neq 0 \text{ und } (\frac{m}{n})^2 = 2}_{B}$

Wir zeigten zunächst $\neg A \to B$ und danach $\neg B$

Damit gilt auch $\neg A \to \neg B$, da $\neg B$ wahr ist.

Wir haben $\neg A \to B$ und $\neg A \to \neg B$ gezeigt, so dass A gemäß §2.9 gilt. □

Notizen:

- Äquivalente Aussage: $(\neg A \to (B \wedge \neg B)) \to A$
- An Stelle von $B \wedge \neg B$ kann jede unerfüllbare Aussage stehen

Aussagenlogik — Indirekter Beweis

Notizen:

- Äquivalente Aussage: $(\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)) \rightarrow A$
- An Stelle von $B \wedge \neg B$ kann jede unerfüllbare Aussage stehen

- Indirekte Beweise sind nicht konstruktiv;
  sie zeigen nur einen Widerspruch auf

$\rightarrow$ *Direkte* Beweise liefern oft tieferen Einblick als *indirekte* Beweise

Beispielaussage (§2.5)

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Formalisierungen:

Beispielaussage (§2.5)

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Formalisierungen:

- QuadratGerade $\rightarrow$ ZahlGerade
  - Beschränkung auf ganze Zahlen nicht modelliert

Prädikatenlogik — Motivation

Beispielaussage (§2.5)

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Formalisierungen:

- QuadratGerade $\rightarrow$ ZahlGerade
  - Beschränkung auf ganze Zahlen nicht modelliert
- GanzeQuadratzahlGerade $\rightarrow$ GanzeZahlGerade
  - Abhängigkeit der beiden Zahlen nicht modelliert
  - nur für eine Zahl modelliert
- $\Big(\text{1gerade} \rightarrow (\text{1gerade} \wedge \text{-1gerade})\Big) \wedge \Big(\text{4gerade} \rightarrow (\cdots)\Big) \wedge \cdots$
  - ineffiziente, unendliche Auflistung (Formeln sind immer endlich)
  - unendlich viele Atome

Prädikatenlogik — Motivation

Beispielaussage (§2.5)

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Probleme:

- Obwohl eine Aussage vorliegt,
  können wir ihre interne Struktur nicht geeignet formalisieren
- Die Abhängigkeit zwischen n und n^2 können wir nicht formalisieren
  - Einführung von Variablen und Aussagenschablonen

Beispielaussage (§2.5)

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Probleme:

- Obwohl eine Aussage vorliegt,
  können wir ihre interne Struktur nicht geeignet formalisieren
- Die Abhängigkeit zwischen n und n^2 können wir nicht formalisieren
  - Einführung von Variablen und Aussagenschablonen
- Die beliebige Wahl von n können wir nicht formalisieren
  - Einführung von Quantoren

Prädikatenlogik — Motivation

- Intuition:
  Eine Aussagenschablone ist eine Repräsentation eines Satzes,
  der Variablen verwenden kann,
  so dass für jede Belegung der Variablen eine Aussage entsteht

Prädikatenlogik — Motivation

- Intuition:
  Eine Aussagenschablone ist eine Repräsentation eines Satzes,
  der Variablen verwenden kann,
  so dass für jede Belegung der Variablen eine Aussage entsteht
- Notizen:
  - eine beliebige Anzahl Variablen ist zulässig (auch 0)
  - Variablen können mit beliebigen Objekten der Vorstellung belegt werden

Prädikatenlogik — Motivation

- Intuition:
  Eine Aussagenschablone ist eine Repräsentation eines Satzes,
  der Variablen verwenden kann,
  so dass für jede Belegung der Variablen eine Aussage entsteht
- Notizen:
  - eine beliebige Anzahl Variablen ist zulässig (auch 0)
  - Variablen können mit beliebigen Objekten der Vorstellung belegt werden

Formalisierungsansatz für §2.5

Es sei

- QuadratGerade(n) die Aussagenschablone für
  "n ist eine ganze Zahl, deren Quadrat gerade ist."
- Gerade(n) die Aussagenschablone für
  "n ist eine gerade ganze Zahl."

Prädikatenlogik — Motivation

- Intuition:
  Quantoren erlauben Formalisierungen von gewissen Variablenbelegungen, für die eine Aussagenschablone gelten muss

Prädikatenlogik — Motivation

- Intuition:
  Quantoren erlauben Formalisierungen von gewissen Variablenbelegungen, für die eine Aussagenschablone gelten muss
- Notizen:
  - Wir nehmen implizit ein Universum der Objekte an
    (jedes Objekt des Universums kann Belegung einer Variable sein)
  - der Allquantor $\forall$ fordert die Gültigkeit der Aussagenschablone für alle möglichen Belegungen einer Variable
  - der Existenzquantor $\exists$ fordert die Gültigkeit der Aussagenschablone für mindestens eine Belegung einer Variable

Prädikatenlogik — Motivation

- Intuition:
  Quantoren erlauben Formalisierungen von gewissen Variablenbelegungen, für die eine Aussagenschablone gelten muss
- Notizen:
  - Wir nehmen implizit ein Universum der Objekte an
    (jedes Objekt des Universums kann Belegung einer Variable sein)
  - der Allquantor $\forall$ fordert die Gültigkeit der Aussagenschablone für alle möglichen Belegungen einer Variable
  - der Existenzquantor $\exists$ fordert die Gültigkeit der Aussagenschablone für mindestens eine Belegung einer Variable

Formalisierung von §2.5

Sei n eine beliebige ganze Zahl. Falls n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

$$\forall n\Big(\mathrm{GanzeZahl}(n) \rightarrow \big(\mathrm{QuadratGerade}(n) \rightarrow \mathrm{Gerade}(n)\big)\Big)$$

§2.11 Begriffe

- Variablen (üblicherweise kleingeschrieben)
  können als Parameter von Prädikaten auftreten
- Prädikat — Aussagenschablone
  bildet zusammen mit Variablen als Parameter ein Atom

§2.11 Begriffe

- Variablen (üblicherweise kleingeschrieben)
  können als Parameter von Prädikaten auftreten
- Prädikat — Aussagenschablone
  bildet zusammen mit Variablen als Parameter ein Atom

Beispiele

- Atom: Gerade(n) Wahrheit hängt nun von n ab
  - Prädikat: Gerade — Gerade(2) ist wahr
  - Variable: n — Gerade(3) ist falsch

Prädikatenlogik — Grundbegriffe

§2.11 Begriffe

- Variablen (üblicherweise kleingeschrieben)
  können als Parameter von Prädikaten auftreten
- Prädikat — Aussagenschablone
  bildet zusammen mit Variablen als Parameter ein Atom

Beispiele

- Atom: Gerade(n) Wahrheit hängt nun von n ab
  - Prädikat: Gerade — Gerade(2) ist wahr
  - Variable: n — Gerade(3) ist falsch
- Atom: Summe(x, y, z)
  - Prädikat: Summe — Summe(x, y, z) wahr
  - Variablen: x, y, z — gdw. $x + y = z$

Notizen

- die bekannten Junktoren können weiterhin verwendet werden
  (auch zur Verknüpfung von Aussagenschablonen)
- die Wahrheit einer Aussagenschablone läßt sich erst bei Kenntnis der Belegung der Variablen bestimmen

Notizen

- die bekannten Junktoren können weiterhin verwendet werden
  (auch zur Verknüpfung von Aussagenschablonen)
- die Wahrheit einer Aussagenschablone läßt sich erst bei Kenntnis der Belegung der Variablen bestimmen

$\rightarrow$ Mechanismus für Umwandlung Aussagenschablone in Aussage

§2.12 Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel.

- $\forall x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. F für alle Belegungen von x wahr ist — $\forall$ = für Alle, Allquantor

§2.12 Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel.

- $\forall x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. F für alle Belegungen von x wahr ist

A = für Alle
Allquantor

§2.12 Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel.

- $\forall x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. F für alle Belegungen von x wahr ist — $\forall$ = für Alle — Allquantor
- $\exists x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. eine Belegung von x existiert, für die F wahr ist — $\exists$ = Existiert ein — Existenzquantor

§2.12 Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel.

- $\forall x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. F für alle Belegungen von x wahr ist — $\forall$ = für Alle — Allquantor
- $\exists x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. eine Belegung von x existiert, für die F wahr ist — E = Existiert ein — Existenzquantor

§2.12 Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel.

- $\forall x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. F für alle Belegungen von x wahr ist — $\forall$ = für Alle — Allquantor
- $\exists x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. eine Belegung von x existiert, für die F wahr ist — $\exists$ = Existiert ein — Existenzquantor

Durch Quantifizierung aller Variablen erhält man eine Aussage.

§2.12 Quantoren

Sei F eine prädikatenlogische Formel.

- $\forall x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. F für alle Belegungen von x wahr ist — $\forall$ = für Alle, Allquantor
- $\exists x\, F$ ist eine Formel, die wahr ist, gdw. eine Belegung von x existiert, für die F wahr ist — $\exists$ = Existiert ein, Existenzquantor

Durch Quantifizierung aller Variablen erhält man eine Aussage.

Beispiel (§2.10)

Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.
Formalisierung: $\neg\exists x\big(\mathrm{Rat}(x) \land \mathrm{Quadrat{=}2}(x)\big)$

Prädikatenlogik — Beispiele

weitere Beispiele:

- Jede ganze Zahl ist echt größer als 0. falsch

$$\forall n\Big(\mathrm{GanzeZahl}(n) \to \mathrm{Größer0}(n)\Big)$$

oder $\forall n\,(n > 0)$ falls Universum aus allen ganzen Zahlen besteht

Prädikatenlogik — Beispiele

weitere Beispiele:

- Jede ganze Zahl ist echt größer als 0. falsch

$$\forall n\Big(\mathrm{GanzeZahl}(n) \rightarrow \mathrm{Größer0}(n)\Big)$$

  oder $\forall n\,(n > 0)$ falls Universum aus allen ganzen Zahlen besteht

- Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ ist die Summe zweier Primzahlen. unbekannt

$$\forall n\Big(\big(\mathrm{Größer2}(n) \land \mathrm{Gerade}(n)\big) \rightarrow \exists i \exists j\big(\mathrm{Prim}(i) \land \mathrm{Prim}(j) \land \mathrm{Summe}(i, j, n)\big)\Big)$$

  (Universum besteht aus allen natürlichen Zahlen)

Prädikatenlogik — Rechenregeln

weitere äquivalente Formeln		Bezeichnung
$\neg\forall x\, F$	$\exists x\, \neg F$	Negation Allquantor
$\neg\exists x\, F$	$\forall x\, \neg F$	Negation Existenzquantor

$\rightarrow$ siehe Übung

StGB § 211 — Mord

1. Der Mörder wird mit lebenslanger Freiheitsstrafe bestraft.
2. Mörder ist, wer
   - aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,
   - heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder
   - um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,

   einen Menschen tötet.

Prädikatenlogik — Formalisierung

StGB § 211 — Mord

1. Der Mörder wird mit lebenslanger Freiheitsstrafe bestraft.
2. Mörder ist, wer
   - aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,
   - heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder
   - um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,

   einen Menschen tötet.

1. $\forall p(\text{Mörder}(p) \rightarrow \text{Lebenslang}(p))$

Prädikatenlogik — Formalisierung

StGB § 211 — Mord

1. Der Mörder wird mit lebenslanger Freiheitsstrafe bestraft.
2. Mörder ist, wer
   - aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen,
   - heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder
   - um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken,

   einen Menschen tötet.

1. $\forall p(\text{Mörder}(p) \rightarrow \text{Lebenslang}(p))$
2. deutlich komplizierter

$$\forall p\Bigg(\text{Mensch}(p) \land \exists q\Bigg(\text{Mensch}(q) \land \big(\text{TötetAusMordlust}(p, q) \lor \cdots\big)\Bigg)$$

$$\rightarrow \text{Mörder}(p)\Bigg)$$

Zusammenfassung

- Grundlegende Beweistechniken
- Tautologien und Erfüllbarkeit
- Grundwissen Prädikatenlogik

Erstes Übungs- und Hausaufgabenblatt bereits im AlmaWeb verfügbar