Universität Leipzig
Institut für Informatik
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Andreas Maletti
Dr. Doreen Götze,
Martin Böhm, Erik Paul,
Tobias Rosenkranz, Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

# Diskrete Strukturen

## Bonusserie 1

---

## Hinweise:

- Dieses Blatt enthält **fakultative** Bonusaufgaben.
- Abgabeschluss der Aufgaben: **15.01.2019** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- Die korrigierten Übungszettel können in den Übungen ab dem 30.01.2019 abgeholt und besprochen werden.

---

### Bonusaufgabe 1 (Vollständige Induktion)

Sei $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: (5)
Für jede natürliche Zahl $n$ gilt

$$a - 1 \mid a^n - 1.$$

Geben Sie zu Beginn des Induktionsschritts die Induktionsvoraussetzung (IV) und die Induktionsbehauptung (IB) an und kennzeichnen Sie die Anwendung der Induktionsvoraussetzung im Beweis.

### Bonusaufgabe 2 (Äquivalenzrelationen)

Wir betrachten die Menge $M = \{1, 2, 6, 24\}$ und die Relation (1)

$$R = \{(m, n) \in M \times M \mid |n - m| \leq 20\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie: $R$ ist eine Äquivalenzrelation.

## Bonusaufgabe 3 (Ordnungsrelationen)

Wir betrachten die partiell geordnete Menge $(M, \leq)$ und eine Teilmenge $T \subseteq M$. (1)
Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen allgemein gelten.

(a) Hat $T$ kein Supremum, so hat $T$ kein größtes Element.

(b) Wenn $T$ genau ein maximales Element hat, so ist dies das größte Element von $T$.

## Bonusaufgabe 4 (Abbildungen)

Auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation (1)

$$\sim \, = \{((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid a + d = c + b\} \ .$$

Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Abbildungen

$$f_i \colon \mathbb{N} \to ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \,/\, \sim)$$

für $i \in \{1,2,3,4\}$ bijektiv sind.

$$f_1 \colon n \mapsto \begin{cases} \left[\left(\frac{n+2}{2}, 0\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \left[\left(0, \frac{n+1}{2}\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f_2 \colon n \mapsto \begin{cases} \left[\left(\frac{n}{2}, 0\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \left[\left(0, \frac{n+1}{2}\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f_3 \colon n \mapsto \begin{cases} \left[\left(\frac{n+2}{2}, 0\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \left[\left(0, \frac{n-1}{2}\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f_4 \colon n \mapsto \begin{cases} \left[\left(\frac{n}{2}, 0\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \left[\left(0, \frac{n-1}{2}\right)\right]_\sim & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

## Bonusaufgabe 5 (Mächtigkeit)

Geben Sie an, welche der folgenden Mengen $M_1, \ldots, M_4$ gleichmächtig sind. (1)

$$\begin{aligned} M_1 &= \{f \mid f \colon \{0,\, 1,\, 2\} \to \{0,\, 1\}\} \\ M_2 &= \mathcal{P}(\{0,\, 1,\, 2\}) \cup \{0\} \\ M_3 &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ M_4 &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

## Bonusaufgabe 6 (Verbände)

Sei $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ ein Verband. Wir definieren wie folgt den Verband $(\mathfrak{U}(\mathcal{L}), \sqcup, \sqcap)$ der (1)
Unterverbände von $\mathcal{L}$. Es sei $\mathfrak{U}(\mathcal{L})$ die Menge aller Unterverbände von $\mathcal{L}$, d.h.

$$\mathfrak{U}(\mathcal{L}) = \{(L', \vee', \wedge') \mid (L', \vee', \wedge') \text{ Unterverband von } \mathcal{L}\} \ .$$

Seien $\mathcal{L}_1 = (L_1, \vee_1, \wedge_1) \in \mathfrak{U}(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee_2, \wedge_2) \in \mathfrak{U}(\mathcal{L})$. Wir definieren wie folgt $\mathcal{L}_1 \sqcap \mathcal{L}_2$ als den größten Unterverband von $\mathcal{L}$, der sowohl in $\mathcal{L}_1$ als auch in $\mathcal{L}_2$ enthalten ist, und $\mathcal{L}_1 \sqcup \mathcal{L}_2$ als den kleinsten Unterverband von $\mathcal{L}$, der sowohl $\mathcal{L}_1$ als auch $\mathcal{L}_2$ enthält.
Seien

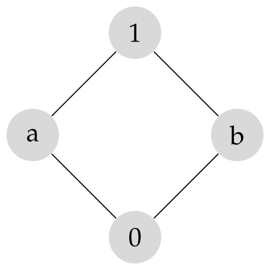
$$L_\sqcap = L_1 \cap L_2 \qquad\qquad L_\sqcup = \bigcap_{\substack{(L',\vee',\wedge') \in \mathfrak{U}(\mathcal{L}) \\ L_1 \cup L_2 \subseteq L'}} L'$$

$$\vee_\sqcap \colon L_\sqcap \times L_\sqcap \to L_\sqcap,\ (x, y) \mapsto x \vee y \qquad \vee_\sqcup \colon L_\sqcup \times L_\sqcup \to L_\sqcup,\ (x, y) \mapsto x \vee y$$

$$\wedge_\sqcap \colon L_\sqcap \times L_\sqcap \to L_\sqcap,\ (x, y) \mapsto x \wedge y \qquad \wedge_\sqcup \colon L_\sqcup \times L_\sqcup \to L_\sqcup,\ (x, y) \mapsto x \wedge y \ .$$

Dann sind $\mathcal{L}_\sqcap = (L_\sqcap, \vee_\sqcap, \wedge_\sqcap)$ und $\mathcal{L}_\sqcup = (L_\sqcup, \vee_\sqcup, \wedge_\sqcup)$ Unterverbände von $\mathcal{L}$. Wir definieren $\mathcal{L}_1 \sqcap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_\sqcap$ und $\mathcal{L}_1 \sqcup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_\sqcup$. Mit $\sqcup$ als Supremum und $\sqcap$ als Infimum bildet $\mathfrak{U}(\mathcal{L})$ einen Verband $(\mathfrak{U}(\mathcal{L}), \sqcup, \sqcap)$.

Sei nun $\mathcal{L}_0$ der Verband, welcher durch das folgende Hasse-Diagramm beschrieben wird.




Verband $\mathcal{L}_0 = (\{0, a, b, 1\}, \vee, \wedge)$

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Verband $(\mathfrak{U}(\mathcal{L}_0), \sqcup, \sqcap)$ der Unterverbände von $\mathcal{L}_0$ nicht distributiv ist.