Vorlesung "Dynamische Systeme und Autonome Agenten".

(R. Der/ M. Herrmann)

Übungsaufgaben (4. Serie)[1]

10.06. 2002 (Abgabe bis 24. 6. 2002)

1. Zum Lernen: Betrachten Sie einen lernenden Agenten, der durch einen linearen Controller mit Parametern a, b gesteuert wird, die Zusatndsdynamik sei also

$$\dot{x} = ax + b$$

Die Fehlerfunktion für die Abweichung des aktuellen Verhaltens vom Zielverhalten sei

$$E = \frac{1}{2}\left(ax + b - Ax - B\right)^2 \tag{1}$$

Gradientenabstieg führt auf die Lerndynamik

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon\left(\left(a - A\right)x + b - B\right)x \\ \dot{b} &= -\varepsilon\left(\left(a - A\right)x + b - B\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Diskutieren Sie die Lerndynamik für den Fall, dass x einen beliebigen aber festen (zeitunabhängigen) Wert hat. **Bemerkung:** Zur Vereinfachung der Diskussion kann man neue Variable $\alpha = a - A$ und $\beta = b - B$ einführen. Beachte $\dot{\alpha} = \dot{a}$ und $\dot{\beta} = \dot{b}$.

2. On-line Lernen: Wenn $a < 0$ ist, dann ist die begleitende x Dynamik konvergent, d.h. bei hinreichend guter Trennung der Zeitskalen (s. Script) können wir immer annehmen, dass $x = -b/a$ ist. Das führt dann auf die Lerndynamik

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon\frac{b}{a}\left(A\frac{b}{a} - B\right) \\ \dot{b} &= -\varepsilon\left(A\frac{b}{a} - B\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Diskutieren Sie diese Dynamik für den Fall, dass neben $a < 0$ auch $A < 0$. Für diese Dynamik existiert ein erstes Integral (vgl. Skript Kap. 3.5). Wie sieht dieses aus und welche Schlussfolgerungen ergeben sich für den asymptotischen ($t \to \infty$) Wert von a aus der Existenz dieses ersten Integrals?

[1] Die mit einem Stern (*) gekennzeichneten Aufgaben sind fakultativ.

3. Batch Lernen: Wir nehmen nun an, dass die x Werte mit Wahrscheinlichkeiten $P(x)$ anfallen. Die Mittelung

$$\overline{E}(c) = \sum_{x \in T} P(x)\, E(x; c) \tag{4}$$

von E über x führt auf

$$\overline{E}(c) = (a-A)^2\, \overline{x^2} + 2(a-A)(b-B)\,\overline{x} + (b-B)^2$$

und damit auf die Lerndynamik

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon\left((a-A)\,\overline{x^2} + (b-B)\,\overline{x}\right) \\ \dot{b} &= -\varepsilon\left((a-A)\,\overline{x} + (b-B)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Diskutieren Sie das Verhalten dieses Systems in Termen der Varianz

$$S^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Zeigen Sie, dass für kleine Werte von S^2 die Zeitkonstante der Dynamik durch

$$\tau_0 = \left(\varepsilon \frac{S^2}{\left(\overline{x}^2 + 1\right)}\right)^{-1} \tag{6}$$

gegeben ist. **Bemerkung**: Die Zeitkonstante eines Attraktors ergibt sich aus dem größten der (negativen) Eigenwerte. Für die Abschätzung verwende man dass $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u$ für hinreichend kleine u.