Vorlesung "Dynamische Systeme und Autonome Agenten".

(R. Der/ M. Herrmann)

Übungsaufgaben (3. Serie)[1]

27. 5. 2002 (Abgabe bis 10. 6. 2002)

1. Quasiperiodisches Verhalten (4 Punkte): Betrachten Sie $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ mit irrationalem $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, wobei θ_1 und θ_2 Winkelkoordinaten sein sollen. Die Dynamik des zugehörigen zweidimensionalen Systems ist nicht periodisch. Aufgaben:

   (a) Warum ist das System nicht chaotisch? (1 Punkt)

   (b) Bestimmen Sie den grössten Lyapunov-Exponenten des Systems (mit oder ohne Computer). (3 Punkte)

2. Zur logistischen Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(x_n) = \lambda x_n (1 - x_n)$ (7 + 4 Punkte)

   (a) Periodische Orbits der Periode k identifiziert man durch Betrachtung der k fach iterierten Abbildungsfunktion $f^{(k)}$. Untersuchen sie die Stabilität der Fixpunkte der Iterierten $f^{(k)}$ der logistischen Abbildung für $k = 1, 2, 3, 4$. (4 Punkte)

   (b) Zeigen Sie, dass im Fall $\lambda = 4$ für fast jeden Startwert (z.B. $x_0 = 1/3$) der Lyapunov-Exponent den Wert $\ln 2$ hat. (3 Punkte)

   (c) * Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass im Fall $\lambda = 4$ die Dynamik für jede Zahl k einen (instabilen) Orbit der Periode k hat. Betrachten Sie dazu die Iterierte $f^{(k)}$, die 2^k Fixpunkte hat. Einige der Fixpunkte können Perioden kleiner k haben, da aber $2^k - \left(2^{k-1} + 2^{k-2} \ldots + 2^1\right) = 2$, können nicht alle Orbits von $f^{(k)}$ Perioden kleiner k besitzen. (4 Punkte)

3. Zur Lorenz-Gleichung (10 + 5 Punkte)

   (a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Lorenz-Gleichung

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

   und untersuchen Sie deren Stabilität für festes b und σ als Funktion von r. (5 Punkte)

[1] Die mit einem Stern (*) gekennzeichneten Aufgaben sind fakultativ.

(b) Untersuchen Sie numerisch das Verhalten der Lorenz-Gleichung für $\sigma = 10$ und $b = 8/3$ sowie folgende Wert für r : 10, 22, 24.5 (Zusatzaufgabe: $r = 100, 126.52, 166.3, 212$ und 400). Dem "idealen" chaotischen Fall $r = 28$ (s.u.) gehen transientes Chaos ($r = 22$) und die Koexistenz von Chaos und stabilen Fixpunkten ($r = 24.5$) voraus, was in geeigneter Weise veranschaulicht werden soll. Bemerkung: Die numerische Lösung der Differentialgeleichung kann nach dem Euler-Verfahren geschehen. Dabei treten relativ grosse numerische Abweichungen auf, die aber hier unberücksichtigt bleiben dürfen. (5 Punkte)

(c) * Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie numerisch den grössten Lyapunov Exponenten der Lorenz-Gleichung für den (üblichen) Parameter-Satz $r = 28$, $\sigma = 10$ und $b = 8/3$. (5 Punkte)