Übungen zur Vorlesung "Dynamische Systeme und Autonome Agenten".

(R. Der/ M. Herrmann)

Serie 2. Abgabe 27. 05. 02

1. Aufgabe (Je Teilaufgabe 1 Pkt.): Wir betrachten eine einfache sensomotorische Schleife: Ein Roboter regelt seine Geschwindigkeit auf der Grundlage seiner von den Radsensoren zurückgelesenen Geschwindigkeit. Sei also $x(t)$ die von den Radsensoren zurückgelesene Geschwindigkeit im Zeitpunkt t. Der Controller gibt daraufhin die neue Sollgeschwindigkeit

   $$y = Q(x) \tag{1}$$

   aus. Der Roboter muss also eine Änderung der Geschwindigkeit $\Delta x := y - x = Q(x) - x$ realisieren, was er aber natürlich nicht instantan erreichen kann. Nehmen wir an, dass die tatsächlich realisierte Änderung proportional zur abgelaufenen Zeit θ ist, dann ist die Änderung $x(t+\theta) - x(t)$ durch $\theta \Delta x$ gegeben. Im Limes $\theta \to 0$ ergibt sich so für die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit $x(t)$ die Differentialgleichung

   $$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

   mit

   $$f(x) = Q(x) - x$$

   Konkret nehmen wir nun das folgende System an

   $$\dot{x} = x\left(c - \frac{x}{K}\right) \tag{3}$$

   wobei c und K Konstanten sind. Wir dürfen (Zeitskala) ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K = 1$ setzen.
   Teilaufgaben:

   (a) Fixpunkte: Finden Sie die Fixpunkte des DS (3).

   (b) Stabiltität: Diskutieren Sie die Stabilität der Fixpunkte.

   (c) Phasenporträt (vgl. Kap. 3.1 im Skript): Stellen Sie die Phasenporträts für qualitativ verschiedene Werte von c dar.

   (d) Beschreiben Sie das Verhalten des Roboters.

2. Aufgabe (Je Teilaufgabe 2 Pkte.): Betrachten Sie die oben eingeführte einfache sensomotorische Schleife wobei der Controller jetzt die neue Sollgeschwindigkeit als

   $$y = \tanh(cx)$$

ausgibt, wobei c wieder ein Parameter ist. Das Gleichung (3) entsprechende DS ist folglich

$$\dot{x} = \tanh(cx) - x \tag{4}$$

Teilaufgaben:

(a) Fixpunkte: Finden Sie qualitativ (grafische Lösung) die Fixpunkte des DS (4).

(b) Phasenporträt: Stellen Sie die Phasenporträts für qualitativ verschiedene Werte von c dar.

(c) Stabilität: Diskutieren Sie die Stabilität der Fixpunkte.

(d) Bifurkation: Zeichnen Sie das Bifurkationsdiagramm.

3. Aufgabe (Je Teilaufgabe 2 Pkte.): Einfluss eines Bias: Im Unterschied zum DS (4) enthalte der Controller jetzt einen Bias H, d.h. wir haben das DS

$$\dot{x} = \tanh(cx + H) - x \tag{5}$$

Teilaufgaben:

(a) Diskutieren Sie für $0 < c << 1$ Lage und Stabilität der Fixpunkte als Funktion von H. (Hinweis: Es gilt $\tanh(z) \approx z$ für $|z| << 1$.)

(b) Desgleichen für $c >> 1$.

(c) Für $c >> 1$ zeigt das System ein hysteretisches Verhalten. Diskutieren Sie dieses, indem Sie das Verhalten des Fixpunktes bei einer periodischen Veränderung von H um $H = 0$ diskutieren.

4. Aufgabe (6 Pkte.): Betrachten Sie das DS

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + cx + xy^2\\ \dot{y} &= x + cy - x^2\end{aligned}$$

Teilaufgaben:

(a) Linearisieren Sie das System um den Ursprung ($x = 0$, $y = 0$) und zeigen Sie, dass für $c = 0$ alle Eigenwerte rein imaginär sind. (2 Pkte.)

(b) Das System durchläuft eine Hopf-Bifurkation an $c = 0$. Zeigen Sie das durch Plot geeigneter Phasenporträts (geht nur numerisch). Ist diese subkritisch, superkritisch oder entartet? (4 Pkte.)