Aufgabe 4) Das dynamische System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + cx + xy^2 \\ \dot{y} &= x + cy - x^2\end{aligned}$$

Linearisierung um $(x, y) = (0, 0)$ ergibt durch Bestimmung der Matrix der Ableitungen (bzw. hier einfach durch Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung, da diese im speziellen Fall der Entwicklung um $(0, 0)$ leicht als klein zu erkennen sind)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(a) Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix ergeben sich als Wurzeln des charakteristischen Polynoms: $(c - \lambda)^2 + 1 = 0$, d.h. $\lambda_{1/2} = \pm i + c$. Für $c = 0$ sind die Eigenwerte rein imaginär.

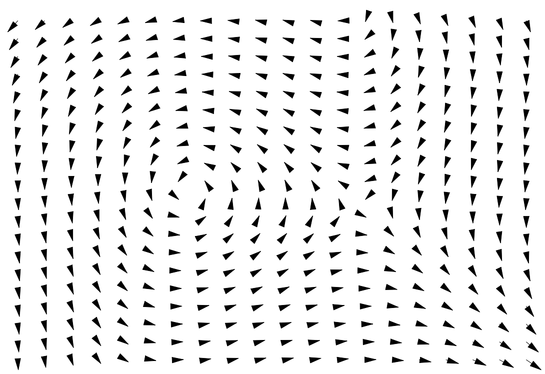
(b) Für $c < 0$ ist der Realteil der Eigenwerte negativ, d.h. der Ursprung ist stabil, für $c > 0$ ist entsprechend der Ursprung instabil. Naheliegend sind die Möglichkeiten eines stabilen Grenzzyklus für positives c (superkritisch Hopfbifurkation) oder eines instabilen Grenzzyklusses für $c < 0$ (subkritische Hopfbifurkation). Wenn wir für $c < 0$ eine Trajektorie in der Nähe von $(0, 0)$ starten und Konvergenz zum Ursprung beobachten, während für weiter entfernt liegende Startwerte Divergenz auftritt, würden wir den Fall einer subkritischen Hopf-Bifurkation favorisieren.

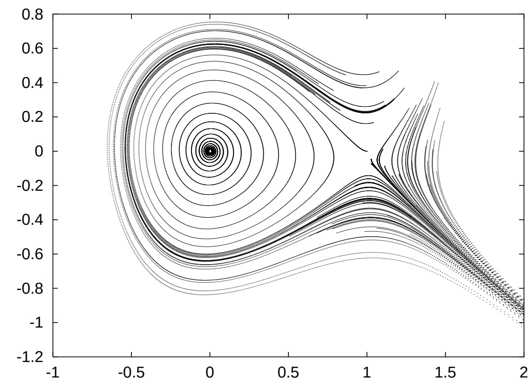
Die Situation ist jedoch komplizierter als bei einer typischen Hopfbifurkation. Für $c = 0$ hat das System drei Fixpunkte, und zwar bei $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Die Fixpunkte existieren auch für c in der Nähe von Null, die beiden letzten sind dann leicht verschoben. Der Fixpunkt bei $(1, 1)$ ist für $c \approx 0$ instabil und nicht weiter von Interesse. Der Fixpunkt bei $(1, 0)$ ist ein Sattelpunkt, wie sich für $c = 0$ durch Linearisierung leicht zeigen lässt.

Für $c < 0$ mündet die instabile Mannigfaltigkeit des Sattels nach Umrundung des Fixpunkts am Ursprung als stabile Mannigfaltigkeit wieder in den Sattel. Das so umschlossene Gebiet ist das Attraktionsbasin des stabilen Fixpunkts bei $(0, 0)$. Der Rand des Gebietes, also die zunächst instabile, dann wieder stabile Mannigfaltigkeit des Sattels bildet einen instabilen Zyklus und wird auch homokliner Orbit genannt.

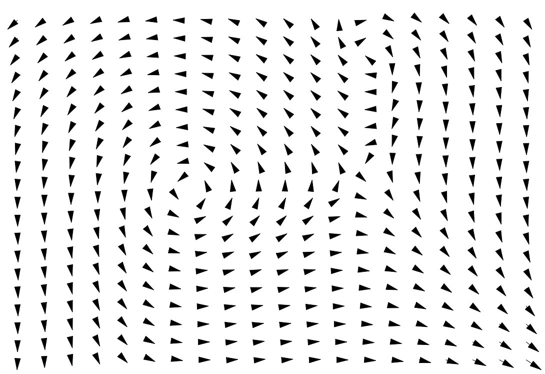
Wenn $c > 0$ ändert sich die Situation global: Die instabile Mannigfaltigkeit trifft nicht mehr auf den Sattel sondern divergiert, während die stabile Mannigfaltigkeit des Sattels jetzt die Trajektorien aus dem nun instabilen Fixpunkt am Ursprung "absaugt".

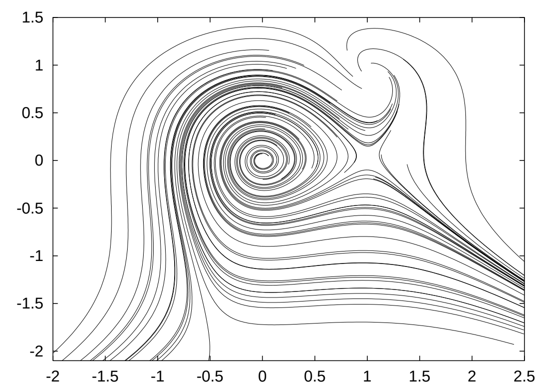
Wir geben zunächst das Vektorfeld und einige Beispieltrajektorien für $c = -0.1$. Der instabile Fixpunkt bei $(1, 1)$ (für $c = 0$) liegt hier ausserhalb des dargestellten Bereichs. Es wurde nur eine stabile Trajektorie gezeichnet.





Nun noch dasselbe wie eben für $c = 0.1$.





Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zwar mit dem Übergang von c von negativen zu positiven Werten ein instabiler Zyklus verschwindet. Der Zyklus schrumpft aber nicht wie bei einer regulären subkritischen Hopfbifurkation zu einem weiterbestehenden instabilen Fixpunkt zusammen, sondern verschwindet bei $c = 0$ plötzlich. Der Sattelpunkt liegt auch für beliebig kleine negative Werte von c auf dem Zyklus und hält den Zyklus quasi fest. Hier eine entartete Hopfbifurkation vor, die durch eine lokale Betrachtung um den Ursprung nicht vollständig verstanden werden kann.