Übungsaufgaben (1. Serie)[1]

29. 4. 2002 (Abgabe bis 13. 5. 2002)

1. Love affairs:
   Sei $R(t)$: Romeos Zuneigung ($\mathrm{R}(t) > 0$) bzw. Abneigung ($R(t) < 0$) gegenüber Julia zur Zeit t $J(t)$: entsprechend für Julia. Z.B. könnte Romeo durch Liebeserweise seitens Julia um so mehr entflammt werden, während Julias Gefühle gerade durch die Abneigung Romeos positiv beeinflusst werden, d.h.: $\begin{array}{rcl}\dot{R} &=& bJ \\ \dot{J} &=& -cR\end{array}$, $b, c > 0$. Dann wäre zu erwarten dass sich Liebe und Abneigung zyklisch abwechseln. Im allgemeinen Fall ist zu betrachten: $\begin{array}{rcl}\dot{R} &=& aR + bJ \\ \dot{J} &=& cR + dJ\end{array}$. Man kann nun verschiedene Typen von Liebhabern definieren, indem man die Vorzeichen von a und b (oder c und d) entsprechend wählt: $a, b > 0$; $a, b < 0$; $a < 0$, $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$.

   (a) *Welche Bezeichnungen könnte man den vier Liebhaber-Typen, die durch die Vorzeichen von a und b in $\dot{R} = aR + bJ$ charakterisiert sind, geben?

   (b) Betrachte das "Verhältnis", das durch $\dot{R} = J$, $\dot{J} = -R + J$ beschrieben ist.

      i. Charakterisiere die Liebhaber-Typen von Romeo und Julia.

      ii. Von welchem Typ ist der Fixpunkt im Koordinatenursprung. Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus den Eigenschaften des Fixpunkt für den Fortgang der Affäre ziehen?

      iii. Skizziere $R(t)$ und $J(t)$ als Funktionen von t, wobei angenommen werden soll, dass $R(0) = 1$ und $J(0) = 0$.

   (c) In den folgenden Problemen soll vorhergesagt werden, wie (unter dem hier verwendeten Ansatz) die jeweiligen Affären sich in Abhängigkeit von den Vorzeichen und den relativen Grössen von a und b entwickeln werden.

      i. Angenommen Romeo und Julia beeinflussen sich gegenseitig in ihren Gefühlen, nehmen jedoch ihre eigenen Gefühle nicht wichtig, d.h.: $\dot{R} = aJ$, $\dot{J} = bR$. Was wird passieren?

      ii. Ziehen sich Gegensätze tatsächlich an? Analysiere den Fall $\dot{R} = aR + bJ$, $\dot{J} = -bR - aJ$.

      iii. *Wenn Romeo und Julia in der gleichen Weise "rangehen" ($\dot{R} = aR + bJ$, $\dot{J} = bR + aJ$), werden sie dann Langeweile oder sich steigernde Entzückung erleben?

[1] Die mit einem Stern (*) gekennzeichneten Aufgaben sind fakultativ. Aufgabe 2b kann anstatt Aufgabe 2c gelöst werden.

iv. *(Romeo der Beharrliche) Nichts kann Romeos Gefühle für Julia ändern: $\dot{R} = 0$, während $\dot{J} = aR + bJ$. Wird Julia ihn letztlich lieben oder hassen?

2. Betrachte ein lineares System mit zufälligen Koeffizienten.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Koordinatenursprung (z.B.) eine instabile Spirale. Genauer gesagt soll das System $\dot{x} = Ax$, mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, betrachtet werden, wobei a, b, c und d auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind.

   (b) *Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die verschiedenen Fixpunkttypen auf? (Fälle, die nur mit Wahrscheinlichkeit Null auftreten, können unberücksichtigt bleiben.)

   (c) Die Antwort zu (b) kann alternativ (bzw. zusätzlich) durch eine Computersimulation erhalten werden, in der eine grosse Anzahl von Zufallsmatrizen getestet werden.

   (d) *Würden sich die in (b) bzw. (c) erhaltenen Resultate qualitativ oder quantitativ unterscheiden, wenn a, b, c und d normalverteilt (Mittel 0, Varianz 1) statt gleichverteilt sind.

3. Zeichne Richtungsfeld und Phasenportrait für $\dot{x} = x^3 - x$. Skizziere die Lösungstypen. Welche Anfangswerte führen zu beschränkten Lösungen?

Antworten[2]

1.) s. Abschnitt 3.3 im Vorlesungs-Skript.

2.) Zufälliges lineares System

a) Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{13}{144}$, siehe b)

b) Die Eigenwerte sind für eine kontinuierliche Verteilung der Matrixelemente mit Wahrscheinlichkeit 1 verschieden, d.h. können uns auf fünf Fälle beschränken: stabiler und instabiler Knoten, Sattel, stabile und instabile Spirale. Wir betrachten die Eigenwerte der Zufallsmatrix als abhängige Zufallsgrösse. Ihre Verteilung ist für eine symmetrische Verteilung der Matrixelemente symmetrisch bzgl. des Vorzeichens des Realteils. Daher treten stabile und instabile Knoten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf, ebenso stabile und instabile Spiralen. Mit den Sattelpunkten bleiben also drei Fälle zu behandlen. Betrachte also

$\lambda_{1/2} = (Tr/2) \pm \sqrt{(Tr/2)^2 - det}$, wobei $Tr = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}$ und $det = \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}\Lambda_{21}$.

(i) Sattel: Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $det = \lambda_1\lambda_2$, d.h. bei einem Sattel ist det immer negativ. Wenn andererseits det negativ ist, dann ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, und die Eigenwerte sind notwendigerweise reell. det nimmt positives und negatives Vorzeichen aus Symmertiegründen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an, so dass gilt: $P\,(\text{Sattel}) = 0.5$.

(ii) Spiralen: Die Eigenwerte sind imaginär, wenn der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist. Integration liefert eine Wahrscheinlichkeit für stabile und instabile Spiralen von jeweils 23/144.

The derivation of this case is somewhat lengthy (its because we did not try to hide any details, but perhaps simpler solutions exist), but it can of course be abbreviated by using a computer algebra program at the earliest stage the formulas are digestible by that program.

Writing a, b, c, d instead of Λ_{11}, Λ_{12}, Λ_{21}, Λ_{22}, we have to find out when $(a+d)^2 + 4bc < 0$. Using the Θ-function ($\Theta(x) = 1$ if $x > 0$ and $\Theta = 0$ otherwise) we write for the Volume Z of the region, where the eigenvalues are complex:

$$Z = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{16}\Theta\left(-4bc - (a-d)^2\right) \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}d$$

where the constant density $\frac{1}{16}$ serves to normalize the volume of the four dimensional cube $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ to unity, such that any parts of the cube represent probabilities. In order to treat the quadratic term in the integrand, it seems convenient to introduce new variables

[2] I'm sorry for the mixed german-english text. Entschuldigung.

$$
\begin{aligned}
x &= a-d \\
y &= a+d
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{2}(x+y) \\
d &= \tfrac{1}{2}(-x+y)
\end{aligned}
$$

such that

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}a &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \\
\mathrm{d}d &= \tfrac{1}{2}(-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

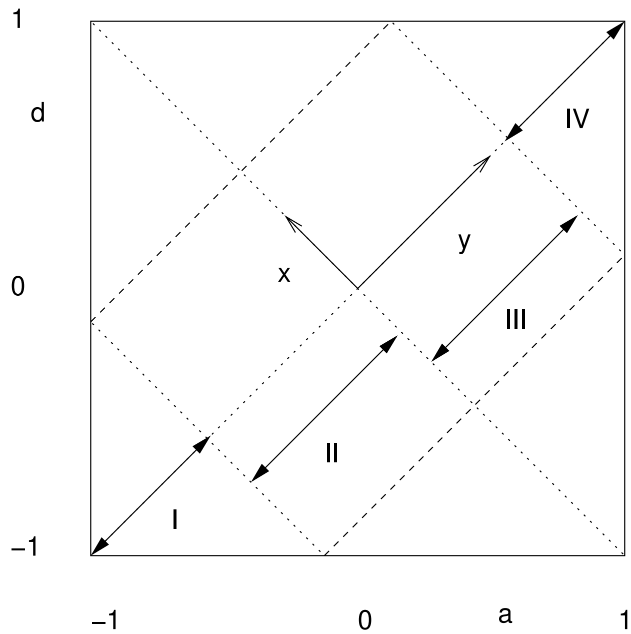
i.e. the Jacobian determinant is 1/4. Although we could write the integration bounds using $|y|$we prefer a separation of the y-integration:

$$
Z = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{0}\int_{-2-y}^{2+y}\frac{1}{64}\Theta\left(-4bc-x^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{2}\int_{-2+y}^{2-y}\frac{1}{64}\Theta\left(-4bc-x^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c
$$

Since the argument of the Θ function cannot be positive for $bc>0$, we can restrict the two outer integrals to positive b and negative c (or vice versa, therefore the factor 2)

$$
Z = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\left(\int_{-2}^{0}\int_{-2-y}^{2+y}\frac{1}{32}\Theta\left(-4bc-x^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{2}\int_{-2+y}^{2-y}\frac{1}{32}\Theta\left(-4bc-x^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c
$$

Further the Θ function is non-zero if $x^2<-4bc$ or $-\sqrt{-4bc}<x<\sqrt{-4bc}$. This restriction to the x-Integration applies only if $|2-|y||>\sqrt{-4bc}$ (the four sign combinations of $|2-|y||$ yield the bounds of the inner integrals in the last equation). Exactly under these restrictions the Θ function is constant and equal to unity, such that we arrive at the following expression for Z. The four integrals over y correspond in this order to the regions (I, II, III, IV) in the figure.



$$
\begin{aligned}
Z &= \tfrac{1}{32}\int_0^1\int_{-1}^0\Big(\int_{-2}^{-2+\sqrt{-4bc}}\int_{-2-y}^{2+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-2+\sqrt{-4bc}}^{0}\int_{-\sqrt{-4bc}}^{\sqrt{-4bc}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_0^{2-\sqrt{-4bc}}\int_{-\sqrt{-4bc}}^{\sqrt{-4bc}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{2-\sqrt{-4bc}}^{2}\int_{-2+y}^{2-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c
\end{aligned}
$$

Of course we can concatenate the two middle integrals over y

$$Z=\frac{1}{32}\int_0^1\int_{-1}^0\left(\int_{-2}^{-2+\sqrt{-4bc}}\int_{-2-y}^{2+y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-2+\sqrt{-4bc}}^{2-\sqrt{-4bc}}\int_{-\sqrt{-4bc}}^{\sqrt{-4bc}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{2-\sqrt{-4bc}}^{2}\int_{-2+y}^{2-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c$$

Performing now the integrals one by one we get:

$$Z=\frac{1}{32}\int_0^1\int_{-1}^0\left(\int_{-2}^{-2+\sqrt{-4bc}}4+2y\,\mathrm{d}y+\int_{-2+\sqrt{-4bc}}^{2-\sqrt{-4bc}}2\sqrt{-4bc}\,\mathrm{d}y+\int_{2-\sqrt{-4bc}}^{2}4-2y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c$$

$$Z=\frac{1}{32}\int_0^1\int_{-1}^0(-4bc)+\left(4\sqrt{-bc}\left(4-4\sqrt{-bc}\right)\right)+(-4bc)\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c$$

$$Z=\frac{1}{32}\int_0^1\int_{-1}^0 8\left(bc+2\sqrt{-bc}\right)\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c=\frac{1}{32}\int_0^1\frac{4}{3}\left(8\sqrt{c}-3c\right)\mathrm{d}c=\frac{1}{32}\frac{46}{9}=\frac{23}{144}$$

Since this result is reproduced by the simulations (cf. below) we are confident that apparently nothing went wrong in the analysis :-)

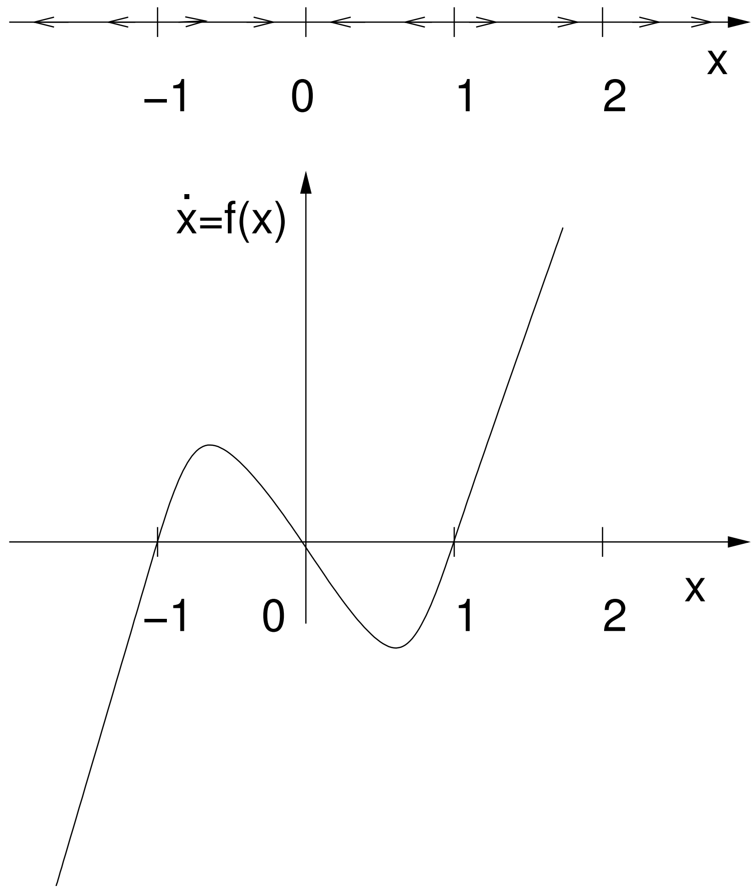
(iii) Knoten: Da mit Wahrscheinlichkeit 1 nur die betrachteten fünf Fälle vorkommen, gilt $P(\text{stabile und instabile Knoten})=1-1/2-23/72=13/72$, d.h. wir erhalten jeweils $13/144$.

(c) Es werden fünf Fälle unterschieden: stabiler und instabiler Knoten, Sattel, stabile und instabile Spirale, s. b). Ausserdem wird die Anzahl der übrigen Fälle bestimmt, die aber gegenüber Rundungsfehlern nicht ins Gewicht fallen (Wahrscheinlichkeit 0). Die Werte sind nach dem Test von 10^6 Zufallsmatrizen stabil und bestätigen die Aussagen der Teilaufgaben a), b) und d), Siehe Tabelle.

	N	Sattel	stab. FP	instab. FP	stab. Spir.	instab. Spir.	Rundungsfehler
Theorie	gleich	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{144}$	$\frac{13}{144}$	$\frac{23}{144}$	$\frac{23}{144}$	0
		0.5	$0.0902\overline{7}$	$0.0902\overline{7}$	$0.1597\overline{2}$	$0.1597\overline{2}$	0
gleich	10^4	0.502062	0.08875	0.08875	0.161375	0.159062	2.460e-6
	10^6	0.499788	0.0904736	0.0904736	0.15962	0.159752	-0.00010742
	10^8	0.500046	0.0902488	0.0902488	0.159713	0.159768	-2.4307e-05
gauss	10^4	0.482	0.125	0.125	0.142	0.158	-0.032
	10^6	0.49966	0.103901	0.103901	0.146506	0.146521	-0.00049316
	10^8	0.500126	0.10353	0.10353	0.146376	0.146408	2.9357e-05

(d) The considerations in (b i) apply directly to Gaussian matrix elements. Concerning spirals we do not expect exactly the same results since some of the integrals bounds then run to or from infinity. On the other hand the majority of the probability mass is inside the cube considered here and the geometrical situation is rather similar. Hence, a similar but not an identical results is expected in this case. The expected deviations are manifest in the numerical study, cf. table.

3. Richtungsfeld und Phasenportrait s. Abbildung. Alle Lösungen die im offenen Intervall $x_0 \in (-1, 1)$ starten, streben dem stabilen Fixpunkt $x^* = 0$ zu und sind daher beschränkt. Anfangswerte ausserhalb von $[-1, 1]$ divergieren. Schliesslich gibt es noch die konstanten Lösungen zu $x_0 = \pm 1$, die im rauschfreien Fall an diesen instabilen Fixpunkten verbleiben.


x
−1
0
1
2
$\dot{x}$=f(x)
x
−1
0
1
2