Übungsaufgaben (1. Serie)[1]

29. 4. 2002 (Abgabe bis 13. 5. 2002)

1. Love affairs:
   Sei $R(t)$: Romeos Zuneigung (R$(t) > 0$) bzw. Abneigung ($R(t) < 0$) gegenüber Julia zur Zeit t $J(t)$: entsprechend für Julia. Z.B. könnte Romeo durch Liebeserweise seitens Julia um so mehr entflammt werden, während Julias Gefühle gerade durch die Abneigung Romeos positiv beeinflusst werden, d.h.: $\begin{array}{rcl}\dot{R} & = & bJ \\ \dot{J} & = & -cR\end{array}$, $b, c > 0$. Dann wäre zu erwarten dass sich Liebe und Abneigung zyklisch abwechseln. Im allgemeinen Fall ist zu betrachten: $\begin{array}{rcl}\dot{R} & = & aR + bJ \\ \dot{J} & = & cR + dJ\end{array}$. Man kann nun verschiedene Typen von Liebhabern definieren, indem man die Vorzeichen von a und b (oder c und d) entsprechend wählt: $a, b > 0$; $a, b < 0$; $a < 0$, $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$.

   (a) *Welche Bezeichnungen könnte man den vier Liebhaber-Typen, die durch die Vorzeichen von a und b in $\dot{R} = aR + bJ$ charakterisiert sind, geben?

   (b) Betrachte das "Verhältnis", das durch $\dot{R} = J$, $\dot{J} = -R + J$ beschrieben ist.

      i. Charakterisiere die Liebhaber-Typen von Romeo und Julia.

      ii. Von welchem Typ ist der Fixpunkt im Koordinatenursprung. Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus den Eigenschaften des Fixpunkt für den Fortgang der Affäre ziehen?

      iii. Skizziere $R(t)$ und $J(t)$ als Funktionen von t, wobei angenommen werden soll, dass $R(0) = 1$ und $J(0) = 0$.

   (c) In den folgenden Problemen soll vorhergesagt werden, wie (unter dem hier verwendeten Ansatz) die jeweiligen Affären sich in Abhängigkeit von den Vorzeichen und den relativen Grössen von a und b entwickeln werden.

      i. Angenommen Romeo und Julia beeinflussen sich gegenseitig in ihren Gefühlen, nehmen jedoch ihre eigenen Gefühle nicht wichtig, d.h.: $\dot{R} = aJ$, $\dot{J} = bR$. Was wird passieren?

      ii. Ziehen sich Gegensätze tatsächlich an? Analysiere den Fall $\dot{R} = aR + bJ$, $\dot{J} = -bR - aJ$.

      iii. *Wenn Romeo und Julia in der gleichen Weise "rangehen" ($\dot{R} = aR + bJ$, $\dot{J} = bR + aJ$), werden sie dann Langeweile oder sich steigernde Entzückung erleben?

[1] Die mit einem Stern (*) gekennzeichneten Aufgaben sind fakultativ. Aufgabe 2b kann anstatt Aufgabe 2c gelöst werden.

iv. *(Romeo der Beharrliche) Nichts kann Romeos Gefühle für Julia ändern: $\dot{R} = 0$, während $\dot{J} = aR + bJ$. Wird Julia ihn letztlich lieben oder hassen?

2. Betrachte in lineares System mit zufälligen Koeffizienten.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Koordinatenursprung (z.B.) eine instabile Spirale. Genauer gesagt soll das System $\dot{x} = Ax$, mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, betrachtet werden, wobei a, b, c und d auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind.

   (b) *Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die verschiedenen Fixpunkttypen auf? (Fälle, die nur mit Wahrscheinlichkeit Null auftreten, können unberücksichtigt bleiben.)

   (c) Die Antwort zu (b) kann alternativ (bzw. zusätzlich) durch eine Computersimulation erhalten werden, in der eine grosse Anzahl von Zufallsmatrizen getestet werden.

   (d) *Würden sich die in (b) bzw. (c) erhaltenen Resultate qualitativ oder quantitativ unterscheiden, wenn a, b, c und d normalverteilt (Mittel 0, Varianz 1) statt gleichverteilt sind.

3. Zeichne Richtungsfeld und Phasenportrait für $\dot{x} = x^3 - x$. Skizziere die Lösungstypen. Welche Anfangswerte führen zu beschränkten Lösungen?