<u>Musterlösung:</u> AlgoDat (Magister) **2. Serie**

1.) 3 Pkt. Zeitkomplexität der gegebenen Funktion *int fac(int n)*

$$T(n) = c + T(n-1)$$

$$Startwert:$$

$$T(1) = 1$$

$$Sei \Rightarrow c = (1+1) \Rightarrow 1 \cdot Vergleich + 1 \cdot Multiplikation$$

$$T(2) = c + T(1) = c + 1$$

$$T(3) = c + T(2) = 2 \cdot c + 1$$

$$T(4) = c + T(3) = 3 \cdot c + 1$$

$$\Rightarrow T(n) = (n-1) \cdot c + 1 = n \cdot c - c + 1$$

Induktionsbeweis:

IA: $T(1) = (1-1) \cdot 2 + 1 = 1$

IB:

$$T(n+1) = c + T(n)$$

$$T(n+1) = c + (n-1) \cdot c + 1 \Rightarrow IV$$

$$T(n+1) = (n) \cdot c + 1$$

$$\Diamond$$

obere Schranke:

$$T(n) = n \cdot c - c + 1 = n \cdot (c - \frac{c}{n} + \frac{1}{n}) \le n \cdot (c + \frac{1}{n}) \le n \cdot (c + \frac{1}{n_0}) = k \cdot n$$

$$z.B.: n_0 = 1$$

$$k = c + \frac{1}{n_0} = c + 1$$

$$\Rightarrow T(n) \in O(n)$$

2.) 6 Pkt. (je 3 Pkt.) Vergleich der Zeitkomplexität bei Polynomberechnung

a) $$y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x \cdot x + \ldots + a_n \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n-mal}$$

1. n-mal Multiplikation zwischen Koeffizienten a_i und x^i

2. n-mal Addition von den Produkten $a_i x^i$

3. (1+2+3+ ... +(n-1))-mal Multiplikation für die Potenzbildung x^i für $2 \le i \le n$

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Somit ergibt sich für T(n):

$$T(n) = n + n + \frac{n(n-1)}{2} = 2n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2}$$

$$\Rightarrow T(n) \in O(n^2)$$

b) nach dem Horner-Schema:

$$y(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = ((\dots(a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + \dots + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

für n=0: $y(x)=a_0 \Rightarrow T(0)=0$

für n=1: $y(x)=a_1 \cdot x + a_0 \Rightarrow T(1)=2$

für n=2: $y(x)=(a_2 \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \Rightarrow T(2)=4$

für n=3: $y(x)=((a_3 \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \Rightarrow T(3)=6$

für n=4: $y(x)=(((a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \Rightarrow T(4)=8$

jeweils n-mal Multiplikation und n-mal Addition

Vermutung: $T(n)=n+n=2\cdot n$

IB:

$$y(x)=\sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = ((\dots(a_{n+1} \cdot x + a_n) \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + \dots + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

$$y(x)=\sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = ((\dots(a_{n+1} \cdot x + \underbrace{a_n) \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + \dots + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0}_{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}$$

$T(n+1)=2+T(n)$

$T(n+1)=2+2\cdot n \Rightarrow IV$

$T(n+1)=2\cdot(n+1)$

$\lozenge$

Somit:

$T(n)=2\cdot n$

$T(n)\in O(n)$

Das Horner-Schema besitzt lineare Zeitkomplexität gegenüber der quadratischen Zeitkomplexität der „normalen“ Polynomberechnung.