3. Prädikatenlogik

3.1 Motivation

In der Aussagenlogik interessiert Struktur der Sätze nur, insofern sie durch "und", "oder", "wenn ... dann", "nicht", "genau dann ... wenn" entsteht.

Für viele logische Schlüsse ist das zu wenig:

> Alle Informatiker sind schlau.
> <u>Der Vater von Peter ist ein Informatiker.</u>
> Der Vater von Peter ist schlau.

Im Sinne der Aussagenlogik sind das verschiedene Sätze, repräsentiert etwa durch A, B, C. Natürlich gilt nicht: $A \wedge B \models C$

Erst wenn die Struktur dieser Sätze berücksichtigt wird, lässt sich der Zusammenhang zwischen Prämissen und Konklusion in diesem Beispiel erfassen.

Die Prädikatenlogik erfasst neben den aussagenlogischen Verknüpfungen folgende strukturelle Aspekte:

1) Sätze können aus Prädikaten (schlau), Funktionen (Vater von ...) und Objektbezeichnern aufgebaut sein
2) Sätze können aus Quantoren (für alle, es gibt) aufgebaut sein.

Das Beispiel oben könnte etwa so repräsentiert werden:

> $\forall x$ (Informatiker(x) $\rightarrow$ Schlau(x))
> <u>Informatiker(Vater(Peter))</u>
> Schlau(Vater(Peter))

3.2 Syntax und Semantik

Syntax

Für die Definition der Formeln muss festgelegt werden, welche Variablen, welche Prädikatensymbole und welche Funktionssymbole verwendet werden können.
Bei den beiden letzteren ist zusätzlich die Anzahl der Argumente anzugeben.
Konstanten können als nullstellige Funktionssymbole aufgefasst werden.

Def.: (Signatur)
Eine (prädikatenlogische) Signatur $\Sigma = (V_\Sigma, P_\Sigma, F_\Sigma, s)$ besteht aus
einer Menge von Variablensymbolen V_Σ,
einer Menge von Prädikatensymbolen P_Σ,
einer Menge von Funktionssymbolen F_Σ, sowie
einer Stelligkeitsfunktion $s: P_\Sigma \cup F_\Sigma \rightarrow Nat$.
Hierbei sind V_Σ, P_Σ und F_Σ paarweise disjunkt.

Def.: (Syntax der Prädikatenlogik)
Sei $\Sigma = (V_\Sigma, P_\Sigma, F_\Sigma, s)$ eine Signatur.
Terme (über Σ) werden induktiv wie folgt definiert:
1. Jede Variable in V_Σ ist ein Term,
2. Falls f in F_Σ Funktionssymbol mit $s(f) = k$ und $t_1, ..., t_k$ Terme, so ist $f(t_1,...,t_k)$ Term.

(Bemerkung: k = 0 zugelassen, nullstellige Funktionssymbole heißen auch Konstanten.)

Formeln (über Σ) werden induktiv wie folgt definiert:
1. Falls P Prädikatensymbol der Stelligkeit k und $t_1,...,t_k$ Terme, so ist $P(t_1,...,t_k)$ Formel.
2. Falls F Formel, so ist auch $\neg F$ Formel
3. Falls F und G Formeln, so sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln
4. Falls x Variable ist und F Formel, so sind auch $\forall x$ F und $\exists x$ F Formeln.

Die nach 1. erzeugten Formeln heißen atomar. Literale sind atomare oder negierte atomare Formeln. F ist Teilformel von G falls F Formel ist und in G auftritt.

Terme stehen für Objekte des jeweiligen Gegenstandsbereichs. Erst Formeln repräsentieren Aussagen, die wahr oder falsch sein können.

Ein Vorkommen einer Variable x heißt gebunden in F, falls dieses Vorkommen in einer Teilformel von F der Form $\forall x$ G und $\exists x$ G stattfindet. Andernfalls heißt das Vorkommen frei.

Beispiel: $P(x, y) \vee \exists x\, Q(x)$. Das erste Vorkommen von x ist frei, das zweite gebunden.

Eine Formel heißt geschlossen (Aussage, sentence) wenn keine Variable in ihr frei vorkommt.

Wie schon in der Aussagenlogik verwenden wir die Abkürzungen $F \rightarrow G$ für $\neg F \vee G$ und $F \leftrightarrow G$ für $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$. Wir verwenden auch dieselben Vorrangregeln für Klammern wie in der Aussagenlogik, zusätzlich binden die Quantoren stärker als die aussagenlogischen Junktoren, d.h. $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$ steht für $(\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$, nicht für $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$.

(intuitive) Beispiele für Zusammenhänge, die wir mit Formeln ausdrücken können:

Unterklassen:	$\forall x\, (Mann(x) \rightarrow Person(x))$
Disjunkte Klassen:	$\forall x\, (Mann(x) \rightarrow \neg Frau(x))$
Alle Unterklassen:	$\forall x\, (Person(x) \rightarrow Mann(x) \vee Frau(x))$
Typrestriktionen:	$\forall x\, \forall y\, (Verheiratet(x, y) \rightarrow Person(x) \wedge Person(x))$
Symmetrie:	$\forall x\, \forall y\, (Verheiratet(x, y) \rightarrow Verheiratet(y, x))$
Definitionen:	$\forall x\, (ReicheFrau(x) \leftrightarrow Frau(x) \wedge Reich(x))$

Semantik der Prädikatenlogik

in Aussagenlogik: atomare Sätze mit wahr oder falsch belegen.
jetzt: Menge festlegen, über die etwas ausgesagt wird, Funktions- und Prädikatensymbole zu Funktionen und Prädikaten auf dieser Menge interpretieren.

Def.: (Struktur)
Sei $\Sigma = (V_\Sigma, P_\Sigma, F_\Sigma, s)$ eine Signatur.

Eine Struktur über Σ ist ein Paar $A = (U_A, I_A)$. Dabei ist U_A eine beliebige nichtleere Menge (Universum, Domain, Individuenbereich). I_A ist eine Abbildung, für die gilt:

1. für jedes k-stellige Prädikatensymbol $P \in P_\Sigma$ ist $I_A(P)$ eine k-stellige Relation über U_A.
2. für jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in F_\Sigma$ ist $I_A(f)$ eine k-stellige Funktion über U_A.
3. für jede Variable $x \in V_\Sigma$ ist $I_A(x)$ ein Element von U_A.

Zur Erinnerung: k-stellige Relation über M: Menge von k-Tupeln, gebildet aus Elementen von M.
Notation: Wir schreiben P^A statt $I_A(P)$, f^A statt $I_A(f)$ und x^A statt $I_A(x)$.

Sei F eine Formel, A eine Struktur über einer Signatur Σ. A heißt zu F passend, wenn alle in F vorkommenden Funktions- und Prädikatensymbole sowie alle freien Variablen im Definitionsbereich von I_A liegen.

Def.: (Semantik der Prädikatenlogik)
Sei F eine Formel, A eine zu F passende Struktur. Der Wert eines Terms t in A, A(t), ist induktiv wie folgt definiert:

1. Falls $t = x$ für Variable x, so ist $A(t) = x^A$
2. Falls $t = f(t_1,...,t_k)$, so ist $A(t) = f^A(A(t_1),...,A(t_k))$

A(t) wird auch Denotation von t in A genannt.
Der Wahrheitswert einer Formel F unter A, A(F), ist induktiv wie folgt definiert:

1. Falls $F = P(t_1,...,t_k)$, so ist $A(F) = 1$ falls $(A(t_1),...,A(t_k)) \in P^A$, 0 sonst.
2. Falls $F = \neg G$, so ist $A(F) = 1$ falls $A(G) = 0$, 0 sonst
3. Falls $F = (G \wedge H)$, so ist $A(F) = 1$ falls $A(G) = 1$ und $A(H) = 1$, 0 sonst.
4. Falls $F = (G \vee H)$, so ist $A(F) = 1$ falls $A(G) = 1$ oder $A(H) = 1$, 0 sonst.
5. Falls $F = \forall x\, G$, so ist $A(F) = 1$ falls für alle d in U_A gilt $A_{[x/d]}(G) = 1$, 0 sonst.
6. Falls $F = \exists x\, G$, so ist $A(F) = 1$ falls für ein d in U_A gilt $A_{[x/d]}(G) = 1$, 0 sonst.

Hierbei ist $A_{[x/d]}$ die Struktur, die mit A identisch ist bis auf den Wert von x.
Es gilt $x^{A[x/d]} = d$.

Falls $A(F) = 1$, so heißt A Modell von F. Wir schreiben $A \models F$.
F heißt erfüllbar, wenn F ein Modell besitzt.
F heißt (allgemein)gültig, falls jede passende Struktur F zu 1 auswertet.
Begriffe sind entsprechend auch für Mengen von Formeln definiert.
Wieder gilt: F gültig gdw. $\neg F$ unerfüllbar.

Die Begriffe Folgerung und Äquivalenz lassen sich direkt aus der Aussagenlogik auf die Prädikatenlogik übertragen, also etwa $F \models G$ gdw. jedes Modell von F auch Modell von G ist.

Beispiel: $F = \forall x\, \exists y\, P(x,y)$

Struktur A_1:
Universum: {Peter, Claudia, Klaus}

P(x,y) soll bedeuten: x liebt y. F also: Jeder liebt jemanden.
Peter liebt Claudia, Claudia liebt Klaus, Klaus liebt Peter
Also:
P^{A_1} = {(Peter,Claudia), (Claudia, Klaus), (Klaus, Peter)}

$A_1(F) = 1$ gdw
1. $A_1[x/\text{Peter}](\exists y\, P(x,y)) = 1$ und
2. $A_1[x/\text{Claudia}](\exists y\, P(x,y)) = 1$ und
3. $A_1[x/\text{Klaus}](\exists y\, P(x,y)) = 1$

1. gibt es d, so dass $A_1[x/\text{Peter},y/d]P(x,y)) = 1$? Ja: d = Claudia, denn (Peter, Claudia) $\in P^{A_1}$.

2., 3. ebenso für d = Klaus bzw. d = Peter.

Damit $A_1(F) = 1$. F also erfüllbar.

Struktur A_2:
Universum: natürliche Zahlen
P(x,y) soll bedeuten: x größer als y. F also: Jede natürliche Zahl ist größer als eine andere.

$P^{A_2} = \{(n,m) \mid n > m\}$

$A_2(F) = 0$ gdw es gibt d, so dass $A_2[x/d](\exists y\, P(x,y)) = 0$

für d = 0 gilt:
es gibt kein d' mit (0,d') in P^{A_2}. Also $A_2[x/0](\exists y\, P(x,y)) = 0$ und damit $A_2(F) = 0$.

F ist also nicht allgemeingültig.

Bemerkung: Aussagenlogik ist ein Spezialfall der Prädikatenlogik: alle Prädikatensymbole null-stellig. Variablen und Terme erübrigen sich dann.

Häufig verwendete Erweiterung: Prädikatenlogik mit Identität:
= als 2-stelliges Prädikatensymbol zugelassen. Standardinterpretation in allen Strukturen A:
$=(t_1,t_2)$ bzw. $(t_1 = t_2)$ ist wahr gdw $t_1^A = t_2^A$.

Beispiel: Gesucht eine erfüllbare Formel F der Prädikatenlogik mit Identität, so dass für jedes Modell von F gilt: die Kardinalität des Individuenbereichs ist nicht größer als 2.

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$

gesucht: Formel, die besagt

1) dass P asymmetrische Relation ist.
$\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$ oder $\forall x\, \forall y\, \neg(P(x,y) \wedge P(y,x))$

2) dass f injektive Funktion ist.
$\forall x\, \forall y\, (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

3) dass f surjektive Funktion ist.

$\forall x\ \exists y\ (f(y) = x)$

Lemma: Sei F Formel, $x_1,\ldots,x_n$ die in F vorkommenden freien Variablen. Es gilt:

1) F ist allgemeingültig gdw $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ F allgemeingültig.
2) F ist erfüllbar gdw $\exists x_1 \ldots \exists x_n$ F erfüllbar.

3.3 Normalformen

Äquivalenzbegriff der Aussagenlogik in Prädikatenlogik direkt übertragbar:
F und G äquivalent, falls für alle zu F und G passenden Strukturen A gilt: A(F) = A(G).

Alle aussagenlogischen Äquivalenzen gelten auch in Prädikatenlogik.
Weitere Äquivalenzen:

Satz: Seien F und G Formeln. Es gilt:

1. $\neg\forall x\ F \equiv \exists x\ \neg F$
   $\neg\exists x\ F \equiv \forall x\ \neg F$

2. Falls x in G nicht frei vorkommt:
   $(\forall x\ F \wedge G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$
   $(\forall x\ F \vee G) \equiv \forall x\ (F \vee G)$
   $(\exists x\ F \wedge G) \equiv \exists x\ (F \wedge G)$
   $(\exists x\ F \vee G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$

3. $(\forall x\ F \wedge \forall x\ G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$
   $(\exists x\ F \vee \exists x\ G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$

4. $\forall x \forall y\ F \equiv \forall y \forall x\ F$
   $\exists x \exists y\ F \equiv \exists y \exists x\ F$

Nicht äquivalent sind:

$(\forall x\ F \vee \forall x\ G)$ und $\forall x\ (F \vee G)$
$(\exists x\ F \wedge \exists x\ G)$ und $\exists x\ (F \wedge G)$

Gegenbeispiel: Universum Nat, F ungerade, G gerade.

Beispiel: folgt $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ aus $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$ und umgekehrt?

Beobachtung: 1-3 aus obigem Satz können benutzt werden, um Quantoren nach vorne zu schieben. Dabei sind möglicherweise Variablen umzubenennen.

Def.: (Substitution) Sei F Formel, x Variable, t Term. F[x/t] bezeichnet die Formel, die man aus F erhält, indem jedes freie Vorkommen von x in F durch t ersetzt wird. Eine solche Ersetzung nennt man Substitution.

Lemma: Sei $F = QxG$ eine Formel mit Quantor Q, y eine Variable, die nicht in G vorkommt. Dann gilt: $QxG \equiv QyG[x/y]$.

Eine Formel heißt bereinigt, wenn es keine Variable gibt, die sowohl gebunden wie frei auftritt, und wenn alle Quantoren verschiedene Variablen haben.

Lemma: Zu jeder Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in bereinigter Form.

Beispiel: $\forall x\ \exists y\ P(x,f(y)) \wedge \forall y\ (Q(x,y) \vee R(x))$
bereinigt: $\forall u\ \exists v\ P(u,f(v)) \wedge \forall y\ (Q(x,y) \vee R(x))$

Def.: Eine Formel ist in Pränexform (PNF), falls sie die Gestalt

$$Q_1y_1Q_2y_2 \ldots Q_ny_n\ F$$

besitzt. Hierbei sind Q_i Quantoren, $n \geq 0$ und F hat keine Quantoren.

Satz: Für jede Formel F gibt es eine äquivalente Formel in Pränexform.

Bew.: Induktion über Formelaufbau.
Induktionsanfang: F atomar => F in PNF
Induktionsschritt:

1. $F = \neg F_1$. $G_1 = Q_1y_1Q_2y_2 \ldots Q_ny_nG'$ sei PNF von F_1 (existiert nach Induktionsvoraussetzung). Dann gilt $F = -Q_1y_1-Q_2y_2 \ldots -Q_ny_n\neg G'$, wobei - den Allquantor in Existenzquantor verwandelt und umgekehrt.

2. $F = (F_1 \text{ op } F_2)$ mit op $\in \{\vee, \wedge\}$. Seien $G_1 = Q_{1,1}y_{1,1}Q_{1,2}y_{1,2} \ldots Q_{1,n}y_{1,n}G_1'$ und $G_2 = Q_{2,1}y_{2,1}Q_{2,2}y_{2,2} \ldots Q_{2,m}y_{2,m}G_2'$ zu F_1 bzw. F_2 äquivalente Formeln in PNF. Weiter gelte, dass die gebundenen Variablen in G_1 und G_2 disjunkt sind (kann durch Umbenennen erreicht werden). Dann ist F äquivalent zu

$$Q_{1,1}y_{1,1}Q_{1,2}y_{1,2} \ldots Q_{1,n}y_{1,n}\ Q_{2,1}y_{2,1}Q_{2,2}y_{2,2} \ldots Q_{2,m}y_{2,m}(G_1' \text{ op } G_2').$$

3. $F = QxF_1$, $Q \in \{\forall, \exists\}$. $Q_1y_1Q_2y_2 \ldots Q_ny_nF_1'$ sei PNF von F_1. Durch Umbenennen kann x verschieden gemacht werden von allen yi. Dann ist F äquivalent zu

$$QxQ_1y_1Q_2y_2 \ldots Q_ny_nF_1'.$$

Bemerkung: in Beweis steckt implizit Algorithmus zur Umformung.

Beispiel:

$\neg\exists xR(x) \vee (P(a) \wedge \forall xQ(a,x))$
$\forall x\neg R(x) \vee \forall x(P(a) \wedge Q(a,x))$
$\forall x\neg R(x) \vee \forall y(P(a) \wedge Q(a,y))$
$\forall x\forall y(\neg R(x) \vee (P(a) \wedge Q(a,y)))$

BPF steht für bereinigte Pränexform.

Def.: Skolemform

Sei $F = Q_1y_1Q_2y_2...Q_ny_nF_1$ eine Formel in BPF. Die Skolemform von F entsteht aus F durch

1) Ersetzen jeder existenzquantifizierten Variable x in F_1 durch einen Funktionsterm $f(x_1,...x_k)$. Dabei ist f ein neues, nicht in F vorkommendes Funktionssymbol. Die Stelligkeit von f ist die Anzahl der in F links vom Existenzquantor von x vorkommenden Allquantoren. Die Argumente sind die Variablen dieser Allquantoren, von links nach rechts.
2) Streichen aller Existenzquantoren.

Beispiel:

$\forall x\exists y\exists z(S(y,x) \wedge P(z,x))$	neue 1-stellige Funktionssymbole suc, pre
$\forall x(S(suc(x),x) \wedge P(pre(x),x))$	Skolemform

Satz: Sei F eine Formel in BPF. F ist erfüllbar gdw die Skolemform von F erfüllbar ist.

Achtung: Skolemisierung ist keine Äquivalenzumformung. Skolemform von F stärker als F, d.h. F aus Skolemform von F folgerbar, aber nicht umgekehrt.

Zusammenfassung der Umformungsschritte einer Formel F in Klauselform:

Gegeben: Formel F
1. Bereinigen von F durch systematisches Umbenennen von gebundenen Variablen.
2. Binden freier Variablen durch Voranstellen von Existenzquantoren (erfüllbarkeitsgleich)
3. Herstellen der PNF.
4. Herstellen der Skolemform.
5. Umformen der Matrix in KNF, Weglassen aller Quantoren und Notieren in Klauselform.

Beispiel:

$\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall yQ(x,y)) \vee \forall yP(y,z)$	
$\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall yQ(x,y)) \vee \forall wP(w,z)$	bereinigt
$\exists z(\neg\exists x(P(x,z) \vee \forall yQ(x,y)) \vee \forall wP(w,z))$	Binden der freien Variable z
$\exists z(\forall x(\neg P(x,z) \wedge \neg\forall yQ(x,y)) \vee \forall wP(w,z))$	
$\exists z(\forall x(\neg P(x,z) \wedge \exists y\neg Q(x,y)) \vee \forall wP(w,z))$	
$\exists z\forall x\exists y\forall w(\neg P(x,z) \wedge \neg Q(x,y)) \vee P(w,z))$	PNF
$\forall x\forall w(\neg P(x,s_z) \wedge \neg Q(x,s_y(x))) \vee P(w,s_z))$	Skolemform
$\forall x\forall w((\neg P(x,s_z) \vee P(w,s_z)) \wedge (\neg Q(x,s_y(x)) \vee P(w,s_z)))$	Matrix in KNF
$\{\{\neg P(x,s_z),P(w,s_z)\}, \{\neg Q(x,s_y(x)), P(w,s_z)\}\}$	Klauselform (implizit allquant.)