VO Wissensrepräsentation

WS 2012

Stefan Woltran, Gerhard Brewka

Institut für Informationssysteme,TU Wien
Institut für Informatik, Uni Leipzig

woltran@dbai.tuwien.ac.at, brewka@informatik.uni-leipzig.de

Behandlung von Inkonsistenzen

- Parakonsistentes Schließen:
  - "Sinnvolles Schließen" aus inkonsistenten Wissensbasen
- Revision von Wissensbasen ("Belief Revision"):
  - Konsistenzerhaltendes Integrieren von neuem Wissen in gegebene Wissensbasis

Parakonsistentes Schließen

Einleitung

- Der Bereich der *parakonsistenten Logiken* befasst sich mit nicht-trivialem Schließen aus widersprüchlichen (inkonsistenten) Wissensbasen.

- Widersprüchliche Information tritt in vielen Applikationen auf:
  - *Semantic Web Reasoning*;
  - *Robotik*;
  - *Natural Language Processing*;
  - *Multi-Agenten Systeme*.

- Widersprüchliche Information kann
  - Teil der relevanten Information sein (*useful inconsistency*);
  - ungewollt (lokal) auftreten (*unwanted inconsistency*).

Einleitung (Wiederholung)

- Der *deduktive Abschluß* von T ist gegeben durch $Th(T) = \{A \mid T \vdash A\}$.
- Manchmal werden *Wissensbasen* als abgeschlossen angenommen, d.h. es gilt $T = Th(T)$.
- Für eine Wissensbasis T gilt:
  - T ist *konsistent* $\iff$ $T \not\models \perp$ $\iff$ T hat *zumindest ein Modell*;
  - T ist *inkonsistent* $\iff$ $T \models \perp$ $\iff$ T hat *kein* Modell.

Einleitung (Forts.)

- **Beobachtung:** Wenn $T \models \bot$ dann $T \models A$ für jede Formel A:
  - es gilt $T \models \bot$, also hat T kein Modell;
  - $T \models A$ gilt gdw. jedes Modell von T auch Modell von A ist;
  - $T \models A$ gilt daher trivialerweise.

- Beispiele für inkonsistente Wissensbasen:

  $\{\bot\},\ \{p, q, \neg q\},\ \{p, q \wedge \neg q\},\ \{p \vee q, \neg p, \neg q\},\ \{p \supset q, p \wedge \neg q\}, \ldots$

Einleitung (Forts.)

- Eine Logik L erfüllt das *Prinzip der Parakonsistenz* wenn gilt:
  - Es gibt Formeln A, B sodass, $\{A, \neg A\} \not\models_L B$.

  ➥ Klassische Logik ist **nicht** parakonsistent!
  d.h. $\{A, \neg A\} \models B$ gilt für alle Formeln A, B.

- Daraus ergeben sich "unintuitive" Situationen:

  ➥ z.B. $\{A, \neg A, B\} \models \neg B$ gilt für alle Formeln A, B.

Einleitung (Forts.)

- Anforderungen an eine parakonsistente Logik L:
  - L erfüllt das Prinzip der Parakonsistenz.
  - Soll klassischer Logik "möglichst nahe" sein, d.h.

(P1) jede Formel der klassischen Aussagenlogik ist auch eine Formel in L;

(P2) wenn $T \models_L A$, dann auch $T \models A$;

(P3) wenn T konsistent, dann $T \models_L A$ gdw. $T \models A$.

Einleitung (Forts.)

- Wir unterscheiden grob zwei Ansätze:
  - Theorie-basiert
  - Logik-basiert

- **Theorie-basiert:** Es werden Inkonsistenzen zwischen den Elementen einer Wissensbasis T behandelt; nicht jedoch innerhalb der Elemente.

- **Logik-basiert:** Beliebige inkonsistente (Mengen von) Formeln werden behandelt.

- Vergleiche $\{p, \neg p, q\}$ vs. $\{p \wedge \neg p \wedge q\}$.

Einleitung (Forts.)

- Andere Betrachtungsweise über den Begriff des Modells; sei $Mod(T)$ die Menge aller Modelle einer Theorie T.
- Wiederholung: Wenn T unerfüllbar (d.h. *kein* Modell hat), folgt *per definitionem* $T \models A$ für beliebige Formel A.
- *Theorie-basierter Ansatz:* benutze Teilmengen $T' \subseteq T$ und betrachte Modelle von T'.
  - ➥ aus $T' \subseteq T$ folgt $Mod(T') \supseteq Mod(T)$.
- *Logik-basierer Ansatz:* benutze *explizit* einen schwächeren Modellbegriff $Mod'(\cdot)$ mit $Mod'(T) \supseteq Mod(T)$.

➥ In beiden Fällen erhalten wir einen schwächeren Konsequenz-operator $\models_L$, sodass gilt: Wenn $T \models_L B$ dann $T \models B$, aber nicht notwendigerweise vice versa.

Einleitung (Forts.)

- **Beispiel:** Betrachte $T = \{p, \neg p \wedge q\}$. T hat kein Modell, also $Mod(T) = \emptyset$. Somit ist T inkonsistent.
  - Alles folgt (klassisch) aus T, insb. auch $\neg q$, also $T \models \neg q$.
- *Theorie-basiert:* Wähle Teilmenge von T, z.B. $T_0 = \{\neg p \wedge q\}$. Definiere, für bel. Formel A, $T \models_L A$ gdw. $T_0 \models A$.
  - Es gilt $T \models_L q$ aber nicht $T \models_L \neg q$.
- *Modell-basiert:* Wähle schwächeren Modellbegriff, z.B. mit $Mod'(T) = \{p : 0, q : 1\}$. Definiere, für bel. Formel A, $T \models_L A$ gdw. jedes schwache Modell $M \in Mod'(T)$ auch Modell von A.
  - Es gilt $T \models_L q$ aber nicht $T \models_L \neg q$.

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen

- **Idee:** Falls Wissensbasis T inkonsistent, betrachte konsistente Teilmengen $T' \subseteq T$.
- **Definition:** Eine Teilmenge $T' \subseteq T$ ist maximal konsistent, wenn
  (1) T' ist konsistent;
  (2) für alle T'', sodass $T' \subset T'' \subseteq T$, ist T'' inkonsistent.
- **Bemerkung:** Bedingung (2) ist äquivalent zu
  (2a) für alle $A \in (T \setminus T')$, ist $T' \cup \{A\}$ inkonsistent (**Monotonie!**).
- Bezeichne die Menge aller maximal konsistenten Teilmengen von T mit $MC(T)$.

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

- **Beispiel:** Betrachte $T = \{p, \neg p \wedge q\}$. T besitzt vier Teilmengen:
  1. $T_1 = \{p, \neg p \wedge q\}$;
  2. $T_2 = \{p\}$;
  3. $T_3 = \{\neg p \wedge q\}$;
  4. $T_4 = \emptyset$.

- **Beobachtungen:**
  - T_1 ist inkonsistent, T_2, T_3 und T_4 sind jeweils konsistent;
  - T_2 und T_3 sind maximal konsistente Teilmengen von T, T_4 ist keine maximal konsistente Teilmenge von T.

- Wir erhalten daher $MC(T) = \{T_2, T_3\}$.

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

➤ **Definition:**

- $\bigcap_{S \in MC(T)} S$ ist die *freie Basis* von T.
- Wir definieren die Konsequenzrelation $\models_{MC}$ als:

$$T \models_{MC} A \iff \bigcap_{S \in MC(T)} S \models A;$$

(A heißt *freies Konsequent* von T).

➤ **Beobachtungen:**

- Für alle Theorien T gilt, $\bigcap_{S \in MC(T)} S \subseteq T$;
- Wenn T konsistent, $MC(T) = \{T\}$, und daher $\bigcap_{S \in MC(T)} S = T$.
- Es folgt: wenn T konsistent, dann gilt für bel. A

$$T \models A \iff T \models_{MC} A.$$

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

- **Beispiel:** $T = \{p, \neg p \wedge q\}$, also $MC(T) = \{\{p\}, \{\neg p \wedge q\}\}$.
  - Daher ist die freie Basis von T die leere Menge.
  - Wir erhalten: $T \models_{MC} A$ gilt nur für Tautologien A.
- **Leicht geändertes Beispiel:** Betrachte $T' = \{p, \neg p, q\}$.
  - Wir erhalten zwei max. konsistente Teilmengen von T', nämlich $T'_1 = \{p, q\}$, $T'_2 = \{\neg p, q\}$; also $MC(T') = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\}$.
  - Die freie Basis von T' ist nun $T'_1 \cap T'_2 = \{q\}$.
  - Es gilt daher nun auch $T' \models_{MC} q$.

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

- **Beobachtung:** MC ist sehr restriktiv.
  - $\models_{MC}$ ist *nicht reflexiv*, d.h. es gilt nicht: $T \models_{MC} A$, falls $A \in T$.
- Verfeinerungen:
  - *Cautious Consequence*: $T \models_C A$ gdw. $S \models A$ für alle $S \in MC(T)$;
  - *Brave Consequence*: $T \models_B A$ gdw. $S \models A$ für zumindest ein $S \in MC(T)$.
- Ähnliche Fragestellung in nichtmonotonen Logiken. Was folgt aus einer Default Theorie?
  - Formeln die in allen Extensionen enthalten sind, oder
  - Formeln die in einer Extension enthalten sind?

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

- **Beispiel:** $T = \{p \vee q, \neg p \wedge r, \neg q \wedge r\}$; ($T$ ist inkonsistent).
  - Die max. konsistenten Teilmengen von T sind $\{p \vee q, \neg p \wedge r\}$; $\{p \vee q, \neg q \wedge r\}$; und $\{\neg p \wedge r, \neg q \wedge r\}$.
  - Es gilt $T \models_{MC} A$ nur wenn A Tautologie, da $\bigcap_{S \in MC(T)} S = \emptyset$;
  - aber $T \models_C r$, da $S \models r$ für jedes $S \in MC(T)$
  - und $T \models_B (p \vee q)$, da ein $S \in MC(T)$ existiert, sodass $S \models p \vee q$.
- $\models_B$ ist reflexiv für konsistente Formeln.

Strukturierte Wissensbasen

- Bisher haben wir alle Formeln einer Wissensbasis gleich behandelt.
- Oft lässt sich das repräsentierte Wissen weiter klassifizieren.
- Einfachster Fall: $KB = (F, H)$, F sicheres Wissen, H unsicher.
- F konsistent: definiere bevorzugte maximal-konsistente Teilmengen von KB
$$BMC(KB) = \{S \in MC(F \cup H) | F \subseteq S\}.$$
- Konsistenz von F nicht garantiert:
$$BMC(KB) = \{S \in MC(F \cup H) | \exists F' \in MC(F) : F' \subseteq S\}.$$
- Verallgemeinerung auf stratifizierte Wissensbasen $KB = (T_1, ..., T_n)$: $BMC(KB) =$
$$\{S \in MC(T_1 \cup ... \cup T_n) | j < n \Rightarrow \exists T' \in MC(T_1 \cup ... \cup T_j) : T' \subseteq S\}.$$

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

- **Zusammenfassung:** Eigenschaften des Theorie-Basierten parakonsistenten Schließens:
  - nutzt klassichen Konsequenz-Operator, dieser wird jedoch auf *Untermengen* der Wissensbasis angewandt. Daher,
    - + keine neue Sprache oder Logik notwendig;
    - + auf konsistenten Wissensbasen, gleiches Verhalten wie klassische Logik.
  - evtl. unerwünschte Eigenschaften:
    - *syntax-abhängig*, d.h. $\{A, \neg A\}$ hat andere Bedeutung als $\{A \wedge \neg A\}$;
    - "lokale" Inkonsistenzen werden nicht berücksichtigt.

Theorie-Basiertes Parakonsistentes Schließen (Forts.)

- **Zusammenfassung (Forts.):** Wir haben gesehen, dass es verschiedene Möglichkeiten, gibt Konsequenzoperatoren (freie Basis, cautious, brave) auf $MC(T)$ zu definieren.
  - ➥ Die konkrete Entscheidung hängt vom Anwendungsgebiet ab.

Logik-Basiertes Parakonsistentes Schließen

- **Ziel:** Definiere Modelle $Mod'(\cdot)$ die *schwächer* sind als klassische Modelle, d.h. es soll $Mod'(T) \supseteq Mod(T)$ gelten.
- Eine Adaptierung der Wahrheitsfunktion für Formeln im Rahmen einer 2-wertigen Logik ist nicht zielführend.
  - Würde dem Ziel, dass konsistente Formeln entsprechend klassischer Logik evaluiert werden sollen, zuwider laufen.

Logik-Basiertes Parakonsistentes Schließen

- **Grundidee:** Zu den üblichen Wahrheitswerten 1 ("true") und 0 ("false") führen wir einen dritten Wahrheitswert u ("both") ein um mit Inkonsistenzen umzugehen.

- ➥ Logische Inferenz wird dann mittels 3-wertiger Modelle die, "möglichst nahe" klassischen 2-wertigen Modellen sind, definiert.

- **Recall:** Wenn $Mod_3(T) \supseteq Mod(T)$ ergibt sich ein schwächerer Konsequenz-Begriff; d.h. aus $T \models A$ folgt i.A. nicht $T \models_3 A$.

Formale Elemente einer 3-wertigen Logik – Semantik

- Wir verwenden diesselbe propositionale Sprache wie für klassische Aussagenlogik.
- Eine *Interpretation* ist eine Funktion die jeder propositionalen Konstante ein Element aus $\{0, 1, u\}$ zuordnet.
- Der *Wahrheitswert*, $V^m(\cdot)$, einer Formel unter einer Interpretation m ist laut folgender Wahrheitstabellen definiert:

$\top$	
	1

$\neg$	
1	0
0	1
u	u

$\vee$	1	0	u
1	1	1	1
0	1	0	u
u	1	u	u

$\supset$	1	0	u
1	1	0	u
0	1	1	1
u	1	0	u

- **Beachte:** Für eine klassische Interpretation, d.h. $V^m(p) \in \{0, 1\}$ für alle p, erhalten wir auch für jede Formel A, $V^m(A) \in \{0, 1\}$.

Formale Elemente einer 3-wertigen Logik – Semantik

- Wir "redefinieren" einige Begriffe bzgl. der 3-wertigen Logik L_3.
  - A ist *wahr* in m falls $V^m(A) \in \{1, u\}$.
  - A ist *falsch* in m falls $V^m(A) = 0$.
  - A ist *erfüllbar* falls es ein m gibt sodass $V^m(A) \in \{1, u\}$.
  - m ist ein *Modell* von A falls $V^m(A) \in \{1, u\}$.
  - Eine Interpretation m ist ein *Modell* einer Theorie T gdw. $V^m(A) \in \{1, u\}$, für alle $A \in T$.

Formale Elemente einer 3-wertigen Logik – Semantik

- Wir "redefinieren" einige Begriffe bzgl. der 3-wertigen Logik L_3.
  - A ist *wahr* in m falls $V^m(A) \in \{1, u\}$.
  - A ist *falsch* in m falls $V^m(A) = 0$.
  - A ist *erfüllbar* falls es ein m gibt sodass $V^m(A) \in \{1, u\}$.
  - m ist ein *Modell* von A falls $V^m(A) \in \{1, u\}$.
  - Eine Interpretation m ist ein *Modell* einer Theorie T gdw. $V^m(A) \in \{1, u\}$, für alle $A \in T$.
  - A ist eine *semantische Konsequenz* von T, symbolisch $T \models_3 A$, falls jedes Modell von T auch ein Modell von A ist.
  - T ist *konsistent*, falls $T \not\models_3 \perp$.

Eigenschaften der 3-wertigen Logik

- **Es gilt:** Interpretation m ist Modell einer Theorie T gdw. m ist Modell von $\bigwedge_{S \in T} S$.
  - keine Syntax-Abhängigkeit.

- Die 3-wertige Logik erfüllt die Eigenschaft der Parakonsistenz.

- Beispiel: $T = \{p, \neg p, q\}$ hat Modelle $\{p : u, q : 1\}$, $\{p : u, q : u\}$. Daher gilt $T \models_3 q$, aber es gilt *nicht* $T \models_3 \neg q$.
  - T ist klassisch inkonsistent; aber konsistent bzgl. L_3.

Eigenschaften der 3-wertigen Logik

- Weitere Eigenschaften:
  - Für jede *implikations-freie* Theorie gilt, dass diese auch konsistent ist.
  - Es gilt die Deduktionseigenschaft:

    $$T \cup \{A\} \models_3 B \iff T \models_3 (A \supset B).$$

  - $\neg A \lor B$ und $A \supset B$ sind *nicht äquivalent*.
    - ➥ Für $m = \{p : u, q : 0\}$ gilt $V^m(p \supset q) = 0$ aber $V^m(\neg p \lor q) = u$.

Eigenschaften der 3-wertigen Logik (Forts.)

- Die bisher definierte Logik ist zu schwach um als geeignetes Werkzeug zu dienen.
- **Grund:** L_3 stimmt im Falle konsistenter Prämissen i.A. *nicht* mit klassischer Logik überein!
- Beispiel (*disjunktiver Syllogismus.*):
  - $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \not\models_3 q$,
    da $\{p : u, q : 0\}$ Modell von $(p \vee q) \wedge \neg p$ aber nicht von q.
- Deshalb:
  - Verwende *Minimierungsmethoden* um dieses Problem auszuschließen!
  - Idee: Betrachte Modelle mit "minimaler Undefiniertheit".

Priest's Logik

- Seien m und n 3-wertige Interpretationen über einem Alphabet mit propositionalen Konstanten $\mathcal{P}$. Definiere

$$m \leq_P n \iff \{p \in \mathcal{P} \mid V^m(p) = u\} \subseteq \{p \in \mathcal{P} \mid V^n(p) = u\} \; .$$

- Sei T eine Menge von Formeln und A eine Formel.

$T \models_P A \iff$ jedes 3-wertige Modell von T das minimal bezüglich $\leq_P$ ist, ist ein 3-wertiges Modell von A.

- **Beachte:** Klassische (zweiwertige) Modelle sind immer minimal bzgl. $\leq_P$.
  - ➥ Falls T klassisch konsistent, $T \models A$ gdw. $T \models_3 A$.

Priest's Logik (Forts.)

- Betrachte das Beipiel von zuvor:

$$T = (p \vee q) \wedge \neg p$$

- T besitzt die folgenden 3-wertigen Modelle:

$$\begin{aligned} m_1 &= \{p : 0,\ q : 1\} \\ m_2 &= \{p : 0,\ q : u\} \\ m_3 &= \{p : u,\ q : 1\} \\ m_4 &= \{p : u,\ q : u\} \\ m_5 &= \{p : u,\ q : 0\} \end{aligned}$$

- Wir erhalten:

  $\{p : 0, q : 1\}$ ist $\leq_P$-minimales Modell von T.

- Es folgt $T \models_P q$.

Priest's Logik (Forts.)

- Weiteres Beispiel: Betrachte

$$T = \{p, \neg p, (\neg p \vee q)\}.$$

- T besitzt die folgenden 3-wertigen Modelle:

$$\begin{aligned} m_1 &= \{p : u,\ q : 1\} \\ m_2 &= \{p : u,\ q : 0\} \\ m_3 &= \{p : u,\ q : u\} \end{aligned}$$

- Wir erhalten:

  m_1, m_2 sind die $\leq_P$-minimalen Modelle von T.

- Es folgt $T \not\models_P q$.

Weitere Ansätze

- 4-wertige Logiken;
- Mischform zwischen logik- und theorie-basiertem Ansatz;
- weitere logik-basierte Ansätze: "Substructural Logics" oder "Quasi-classical Logics";
- "Goal-directed inconsistency handling": Gegeben Wissensbasis T und Formel A; Semantik von T hängt von A ab.
- Belief Revision: Gegeben Wissensbasis T und neues Wissen A; inkorporiere A in T, so dass die erweiterte Wissensbasis konsistent bleibt.
- Argumentation Frameworks: Behandeln sich widersprechende Aussagen auf Meta-Ebene.

Belief Revision

Einleitung

- **Grundproblem:**
  - Gegeben (konsistente) Wissensbasis W; und
  - neue Information A.
  - Integriere A in W, so dass die resultierende Wissensbasis
    - konsistent bleibt;
    - A enthält;
    - anderes Wissen aber so unbeeinflusst wie möglich bleibt.
- Verwandte Probleme:
  - Belief *Merging* ("Zusammenführen" mehrerer Wissensbasen);
  - Belief *Contraction* ("Zurücknehmen" von A in W).

Einleitung (Forts.)

- **Problem:** Ad hoc Ansatz, also simples Hinzufügen von A zu W, sprich $Th(W \cup \{A\})$, kann zur Inkonsistenz führen.
  - ➥ In diesem Fall gilt $B \in Th(W \cup \{A\})$ für bel. B;
  - ➥ Wissen in W geht verloren!

- Beispiel: $W = Th(\{C \lor D, \neg C\})$ und neue Information $\neg D$. $Th(W \cup \{\neg D\})$ ist inkonsistent!

Einleitung (Forts.)

- Aspekte der Belief Revision:
  - Konkrete Form der Repräsentation (*Belief Set* vs. *Belief Base*).
  - Explizites Wissen vs. implizites (ableitbares) Wissen.
  - Anforderungen an die Revision selbst:
    1. Wissensbasis soll nach Möglichkeit konsistent bleiben.
    2. Ableitbares Wissen soll erhalten bleiben.
    3. Der Verlust von Wissen soll minimiert werden.
    4. "Unwichtigeres" Wissen sollte eher aufgegeben werden.

Einleitung (Forts.)

- Wir betrachten im folgenden Belief Sets W, d.h. $Th(W) = W$.
- Notation (sei $\mathcal{L}$ die Menge der aussagenlogischen Formeln):
  - Die (Expansions-)Funktion $+ : 2^{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \to 2^{\mathcal{L}}$ ist definiert als $W + A = Th(W \cup \{A\})$;
  - Die (Revisions-)Funktion $\dot{+} : 2^{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \to 2^{\mathcal{L}}$ soll $+$ bzgl. Anforderungen an eine Revision verfeinern.
- Die bekannteste Formalisierung solcher Anforderungen sind die sog. AGM-Postulate nach Alchourron, Gärdenfors, and Makinson.

AGM-Postulate

(1) $W \dot{+} A$ ist ein Belief Set.

(2) $A \in W \dot{+} A$.

(3) $W \dot{+} A \subseteq W + A$.

(4) Wenn $\neg A \notin W$, dann $W + A \subseteq W \dot{+} A$.

(5) $W \dot{+} A$ ist inkonsistent gdw. A inkonsistent.

(6) Wenn $\models A \equiv B$, dann $W \dot{+} A = W \dot{+} B$.

(7) $W \dot{+} (A \wedge B) \subseteq (W \dot{+} A) + B$.

(8) Wenn $\neg B \notin W \dot{+} A$, dann $(W \dot{+} A) + B \subseteq W \dot{+} (A \wedge B)$.

AGM-Postulate (Forts.)

- Diskussion der Postulate:
  - ad $(3+4)$: wenn $W+A$ konsistent dann ist $W\dot{+}A = W+A$; vgl. $(P2+P3)$ aus dem Bereich der Parakonsistenten Logiken.
  - ad (5): $W\dot{+}A$ wird nur dann inkonsistent, wenn die zu inkorporierende Information A selbst widersprüchlich ist.
  - ad (6): Revision soll syntax-unabhängig sein (*Extensionalität*).
  - ad $(7+8)$: Revision von W mit $A \wedge B$ soll "möglichst" nahe an sequentieller Revision sein;

    Anmerkung: AGM-Postulate betrachten *nicht* den Fall der "iterated" Revision; daher wird $(7+8)$ über eine Kombination von Revision und Expansion ausgedrückt.

AGM-Postulate (Forts.)

- Konsequenzen aus den AGM-Postulaten:
  - (7) ist äquivalent zu $(W \dot{+} A) \cap (W \dot{+} B) \subseteq W \dot{+} (A \vee B)$;
  - (8) ist äquivalent zu: Wenn $\neg A \notin W \dot{+} (A \vee B)$, dann $W \dot{+} (A \vee B) \subseteq (W \dot{+} A) \cap (W \dot{+} B)$.
  - Daraus folgt: $W \dot{+} (A \vee B) \subseteq Th((W \dot{+} A) \cup (W \dot{+} B))$.
  - weitere Resultate ableitbar.
- Bemerkung: Die AGM-Postulate erzwingen *keine* eindeutige konkrete Definition für $\dot{+}$.
- Operatoren, die alle Postulate erfüllen, nennt man vollständig rational.
- Idee: verwende Präferenzen, die spezifizieren, welche Formeln mehr verankert sind/weniger leicht aufgegeben werden sollen.

Epistemic Entrenchment

Totale Präordnung $\leq$ (reflexiv: $p \leq p$, transitiv: $p \leq q$, $q \leq r \Rightarrow p \leq r$) auf L. Es muss zusätzlich gelten:

- **Dominanz**: wenn $p \vdash q$, dann $p \leq q$
- **Konjunktivit**ät: $p \leq p \wedge q$ oder $q \leq p \wedge q$
- **Minimalität**: wenn W konsistent, dann $p \notin W$ gdw $p \leq q$ für alle q
- **Maximalität**: wenn $p \leq q$ für alle p, dann ist q Tautologie

Dominanz: wenn q aufgegeben wird, muss p auch aufgegeben werden. p höchstens so verankert wie q.
Konjunktivität: $p \wedge q$ kann man nur aufgeben, indem man p oder q aufgibt. Eine der Formeln also höchstens so verankert wie Konjunktion.
Minimalität: Formeln nicht in W am wenigsten verankert.
Maximalität: Tautologien immer geglaubt, also am meisten verankert.

Revision auf Basis von Epistemic Entrenchment

Definiere Revisionsoperator so ($a < b$ gdw. $a \leq b$ und nicht $b \leq a$):

$$W \dot{+} p = \{q \in W | \neg p < q\} + p$$

Man kann zeigen (Repräsentationstheorem der AGM-Theorie):

1. Jeder vollständig rationale Revisionsoperator wird durch eine epistemic entrenchment Ordnung erzeugt.
2. Jeder durch eine epistemic entrenchment Ordnung erzeugte Revisionsoperator ist vollständig rational.

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision

- **Idee:** Betrachte Modelle der Belief-Sets statt die Belief-Sets selbst.
- Genauer: Die Modelle von $W \dot{+} A$ sollen eine Teilmenge der Modelle von A sein.
  - ➥ garantiert $A \in (W \dot{+} A)$.
- Die Auswahl der Teilmenge soll wiederum von W abhängen (und nicht leer sein, wenn A erfüllbar).

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision (Forts.)

- Wiederholung Mengenlehre (Symmetrische Differenz):

$$S \Delta T := (S \setminus T) \cup (T \setminus S).$$

- Wir adaptieren "Symmetrische Differenz" zwischen Interpretationen m, n (sei $\mathcal{P}$ die Menge der propositionalen Konstanten):

$$m \Delta n \quad := \quad \{p \in \mathcal{P} \mid V^m(p) = 1\} \, \Delta \, \{p \in \mathcal{P} \mid V^n(p) = 1\}.$$

- Informell: Die symmetrische Differenz zwischen zwei Interpretationen beinhaltet jene prop. Konstanten, die in genau einer der beiden Interpretationen wahr sind.

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision (Forts.)

- **Beispiel:** $W = Th(\{p \wedge \neg q\})$; $A = q$.
  - Beachte: $W + A$ ist inkonsistent.
- Modelle von W (über $\mathcal{P} = \{p, q\}$):

$$m \quad = \quad p : 1, q : 0$$

- Modelle von A:

$$n_1 = p : 1, q : 1 \qquad n_2 = p : 0, q : 1$$

- Wir erhalten die folgenden symmetrischen Differenzen:

$$m \Delta n_1 = \{q\} \qquad m \Delta n_2 = \{p, q\}$$

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision (Forts.)

- Gegeben eine Interpretation m, berechnen wir die *minimalen* (bzgl. Teilmengenrelation) Distanzen zu Modellen einer Formel A:

$$\mu(m, A) \quad := \quad min_{\subseteq}\{m\Delta n \mid n \text{ ist Modell von } A\};$$

- Für unser Beispiel erhalten wir:

$$\mu(m, A) \quad = \quad \{\{q\}\}.$$

- Ansatz nach *Winslett*:

$$Mod(W \dot{+}_w A) := \{n \in Mod(A) \mid \exists m \in Mod(W) : m\Delta n \in \mu(m, A)\}.$$

- Beispiel: Wir erhalten $Mod(W \dot{+}_w A) = \{n_1\} = p : 1, q : 1$. Die Revision von $p \wedge \neg q$ mit q ergibt also $W \dot{+}_w A = Th(\{p \wedge q\})$.

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision (Forts.)

- **Beispiel:** $W = Th(\{p \wedge q\})$, $A = p \wedge (q \equiv r)$.
  - Beachte: $W + A = Th(\{p \wedge q \wedge r\})$ ist konsistent (und daher lt. Postulat (4) das gewünschte Ergebnis für $W \dot{+} A$).
- Wir erhalten folgende Modelle über $\mathcal{P} = \{p, q, r\}$.

$$\begin{aligned} Mod(W) &= p:1, q:1, r:0;\ \ p:1, q:1, r:1 \\ Mod(A) &= p:1, q:1, r:1;\ \ p:1, q:0, r:0 \end{aligned}$$

- und daher folgende Differenzen:

Δ	$p:1, q:1, r:1$	$p:1, q:0, r:0$
$p:1, q:1, r:0$	$\{r\}$	$\{q\}$
$p:1, q:1, r:1$	$\emptyset$	$\{q, r\}$.

- Wir erhalten $Mod(W \dot{+}_w A) = Mod(A)$ (also nicht wie intendiert $W \dot{+}_w A = W + A$).

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision (Forts.)

- **Lösung:** Anstelle der Berechnung der Distanzen für jedes einzelne $m \in Mod(W)$, betrachte die Distanzen zu den Modellen "global".
- Definiere
$$\delta(W, A) \quad := \quad min_{\subseteq} \bigcup_{m \in Mod(W)} \mu(m, A).$$
- Ansatz nach *Satoh*:
$$Mod(W \dot{+}_s A) := \{n \in Mod(A) \mid \exists m \in Mod(W) : m \Delta n \in \delta(W, A)\}.$$
- m akzeptiert bei Winslett:
  m hat minimalen Abstand zu mindestens einem W-Modell;
  bei Satoh: kein Modell ist näher an irgendeinem W-Modell als m.
- Für unser Beispiel erhalten wir $\delta(W, A) = \{\emptyset\}$, diese Distanz wird nur durch das Modell $n = p : 1, q : 1, r : 1$ erreicht.
  - ➥ Wir erhalten daher $Mod(W \dot{+}_s A) = \{n\}$, also $W \dot{+}_s A = \{p \wedge q \wedge r\}$. Dies entspricht $W + A$.

Modell-Basierte Ansätze zur Belief Revision (Forts.)

- Weitere Ansätze (*Forbus*, *Dalal*) berechnen die Minimalität von Distanzen nicht mittels Teilmengeninklusion, sondern nutzen Minimalität bzgl. der *Kardinalität* der Differenzen.
- Ergibt im Allgemeinen unterschiedliche Ergebnise.
- AGM-Postulate: Winslett verletzt (4); Satoh verletzt (8). Der Ansatz nach Dalal erfüllt alle 8 Postulate.

Basisrevision

- Belief states unendlich. Epistemic entrenchment Relation auf unendlicher Menge.
- Aus Informatiksicht unpraktisch. Was tun?
  - Repräsentation des belief state durch endliche Formelmenge T (belief base).
  - Repräsentation der Präferenzen als Relation auf T.
- Belief base (KB) T wird partitioniert in Mengen $T_1, ..., T_n$.
- Mengen mit niedrigerem Index haben höhere Priorität. Bei Revision möglichst viele Formeln mit hoher Priorität beibehalten.
- Sei PB_L die Menge aller stratifizierten belief bases, TH_L die Menge der belief states von L. Der Revisionsoperator ist jetzt vom Typ

$$PB_L \times L \to TH_L.$$

Wir verwenden dasselbe Symbol $\dot{+}$, Typ ergibt sich aus Kontext .

Basisrevision, Forts.

- Wir definieren: Sei T Menge von Formeln. $T \perp p$ ist die Menge aller maximalen Teilmengen von T, aus denen p nicht gefolgert werden kann:

$$B \in T \perp p \text{ gdw. } B \subseteq T; B \not\vdash p; B \subset B' \text{ und } B' \subseteq T \Rightarrow B' \vdash p.$$

- Sei $(T_1, ..., T_n)$ stratifizierte KB. $(T_1, ..., T_n) \perp p$ ist die Menge aller maximal bevorzugten Elemente von $(T_1 \cup ... \cup T_n) \perp p$.
  Seien $B, B' \in (T_1 \cup ... \cup T_n) \perp p$. B wird bevorzugt vor B' ($B > B'$) gdw. es ein k gibt, so dass gilt:
  1. $B \cap T_k$ echte Obermenge von $B' \cap T_k$,
  2. für $1 \leq i < k$ gilt: $B \cap T_i = B' \cap T_i$.

Basisrevision, Forts.

- Jetzt können wir definieren (prioritized meet base revision):

$$(T_1, \ldots, T_n)\dot{+}p = \bigcap_{B \in (T_1, \ldots, T_n) \perp \neg p} Th(B) + p.$$

- Abgeleiteter Operator für belief state $Th(T) = Th(T_1 \cup \ldots \cup T_n)$:

$$Th(T)\dot{+}p = (T_1, \ldots, T_n)\dot{+}p.$$

- Erfüllt alle Postulate bis auf 8.
- Erzeugter belief state lässt sich wieder als endliche Basis repräsentieren:

$$Th(T)\dot{+}p = Th((\bigvee_{B \in (T_1, \ldots, T_n) \perp \neg p} B) \wedge p).$$

Basisrevision, Forts.

- Problem: revidierte Wissensbasis kann exponentiell groß werden:

$$T = \{p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_m\},\ p = \bigwedge_{i=1,...,m} (p_i \equiv \neg q_i).$$

- $T \perp \neg p$ hat 2^m Elemente.
- Cut base revision: gehe von wichtigstem Level zu weniger wichtigen bis $\neg p$ hergeleitet werden kann. Nimm alle Formeln aus den Levels mit kleinerem Index und p:

$$(T_1, ..., T_n)\dot{+}p = Th(T_1 \cup ... \cup T_j) + p,$$

  wobei $T_1 \cup ... \cup T_j \not\vdash \neg p$ und $T_1 \cup ... \cup T_{j+1} \vdash \neg p$.
- Vorteil: einfache Repräsentation der resultierenden belief base: $T_1 \cup ... \cup T_j \cup \{p\}$.
  Nachteil: viel Information geht verloren.

Basisrevision, Forts.

- Mittelweg: linear base revision
- Idee: wie bei cut base revision Prioritätsklassen komplett übernehmen oder verwerfen, aber nicht beim ersten Level aufhören, an dem p hergeleitet werden kann:
- Sei
$$(T_1, \ldots, T_n) \setminus q = T'_1 \cup \ldots \cup T'_n,$$
wobei $T'_i = \emptyset$ falls $T'_1 \cup \ldots \cup T'_{i-1} \cup T_i \vdash q$, $T'_i = T_i$ sonst. Definiere
$$(T_1, \ldots, T_n) \dot{+} p = Th(T_1, \ldots, T_n) \setminus \neg p + p.$$
- Ergebnis der Basis-Revision Formelmenge ohne Präferenzen.
Für wiederholte Revision (iterated belief revision) noch festzulegen, wie die neuen Präferenzen nach der Revision aussehen.
- Einfache Möglichkeit für linear base revision: neue Formel kommt in ersten Level, die anderen dahinter “zusammengeschoben”.

Konsistenz-Basierter Ansatz zur Belief Revision

- **Idee:** Finde Modelle für Revision mittels Logik selbst.
- **Wichtige Methode:** Umbennung.
  - Für jede propositionale Konstante p, führe neues p' ein.
  - Für eine Formel A, bezeichnet A' jene Formel die durch ersetzen jeder prop. Konstante p in A durch p' resultiert.
  - Für Theorie T, $T' = \{A' \mid A \in T\}$.
- **Beobachtung:** Wenn W und A konsistent, dann ist auch $Th(W' \cup A)$ konsistent, auch im Falle, dass $Th(W \cup A)$ inkonsistent.

Konsistenz-Basierter Ansatz zur Belief Revision

- Betrachte Wissensbasis W, Formel A, und $Th(W' \cup \{A\}) \cap \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ ist die Menge aller ursprünglichen (“unprimed”) Formeln).
- Inkorporiere Wissen aus W durch Verbindungen zwischen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$, d.h. mittels Hinzufügen von Formeln $p \equiv p'$.
- **Definition:** Seien W und A wie oben und $S \subseteq \{p \equiv p' \mid p \in \mathcal{P}\}$ maximal konsistent mit $W' \cup \{A\}$.
  Dann heisst $Th(W' \cup S \cup \{A\}) \cap \mathcal{L}$ *belief-change extension* (BC-extension) von (W, A).
  - Dann folgt A aus jeder solcher belief-change extension.
- Beachte: Es gibt möglicherweise mehrere BC-extensionen, falls es keine gibt, betrachten wir $\mathcal{L}$ als BC-extension.

Konsistenz-Basierter Ansatz zur Belief Revision

- **Beispiel:** Sei

$$W = Th(p \wedge q) \quad A = \neg p \vee \neg q.$$

Wir betrachten $W' = Th(p' \wedge q')$, $S \subseteq \{p \equiv p', q \equiv q'\}$:

1. $W' \cup \{p \equiv p', q \equiv q'\} \cup \{A\}$ ist inkonsistent.
2. $W' \cup \{p \equiv p'\} \cup \{A\}$ ist konsistent.
3. $W' \cup \{q \equiv q'\} \cup \{A\}$ ist konsistent.
4. $W' \cup \emptyset \cup \{A\}$ ist konsistent, aber nicht maximal.

Daher gibt es zwei BC-extensionen für (W, A):

(a) $Th(p, \neg q)$;
(b) $Th(\neg p, q)$.

Konsistenz-Basierter Ansatz zur Belief Revision

- **Choice Revision:** Definiere $W \dot{+} A$ mittels Auswahl einer BC-extension.
- **Skeptical Revision:** Definiere $W \dot{+} A$ als Schnittmenge über alle BC-extensions.
- Beide Ansätze erfüllen alle AGM-Postulate, außer (5) und (8). Folgende schwächere Variante von (5) ist allerdings erfüllt.
  (5') $W \dot{+} A$ ist inkonsistent gdw. W ist inkonsistent oder $\models \neg A$.

Zusammenfassung

- Formalismen:
  1. Theorie-basiertes parakonsistentes Schließen.
  2. Priest's Logik.
  3. Modell-Basierte Belief-Revision.
  4. Basisrevision und konsistenz-basierte Revision.
- 1. und 4. nutzen das Konzept von *maximal konsistenten* Theorien;
- 2. und 3. nutzen diverse Methoden der *Minimierung*.

Literatur

- Parakonsistente Logiken (gesammelte Artikel):
  [1] L. Bertossi, A. Hunter, T. Schaub (Eds.): Inconsistency Tolerance. LNCS 3300, Springer 2005.
- Parakonsistente Logiken (Übersichts-Artikel):
  [2] A. Hunter: Paraconsistent logics, in *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertain Information*, Vol. 2, edited by D. Gabbay and P. Smets. Kluwer 1998.
- Priest's Logik:
  [3] G. Priest: Reasoning About Truth. *Artificial Intelligence* 39(2): 231–244, 1989.

Literatur (Forts.)

- Belief Revision (Übersichts-Artikel):
  [4] P. Gärdenfors, H. Rott. Belief revision. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol .4, 35–132. Oxford University Press, 1995.
- Belief Revision (neuerer Übersichts-Artikel):
  [5] P. Peppas. Belief Revision. In *Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier 2007.
- Konsistenz-Basierte Belief Revision (und Implementierung):
  [6] J. Delgrande, T. Schaub, H. Tompits, S. Woltran: On Computing Solutions to Belief Change Scenarios. *Journal of Logic and Computation*, 14(6): 801–826, 2004.