Exkurs: Prädikatenlogik 2. Stufe (2nd Order Logic)

Erweiterung der klassischen Prädikatenlogik 1. Stufe um <u>Quantifikation über Prädikate</u> (dazu Prädikatsvariablen mit Stelligkeit) <u>und Funktionen</u> (dazu Funktionsvariablen mit Stelligkeit)

Semantik:

Def. Struktur: wie für 1. Stufe, aber μ bildet zusätzlich Prädikats- (Funktions-) variablen der Stelligkeit n auf n-stellige Prädikate (Funktionen) über dem Individuenbereich ab.

Sei p n-stellige Prädikatsvariable.

$p(a_1, ..., a_n)$ ist wahr gegeben I, μ genau dann wenn

$$(||a_1||_{I,\ \mu}\ , ..., ||a_n||_{I,\ \mu}\ ) \in \mu\ (p)$$

also: wenn Tupel aus den Elementen des Individuenbereichs, zu denen $a_1, ..., a_n$ interpretiert werden, in dem Prädikat enthalten ist, zu dem p interpretiert wird.

$\forall$p.F wahr gegeben I, μ genau dann wenn F wahr ist in jedem I, μ', wobei μ' mit μ übereinstimmt, jedoch p zu einer beliebigen Relation (bzw. Funktion) interpretiert.

Die Begriffe Modell, Folgerung, Inkonsistenz etc. wie gehabt.

Erweiterung ermöglicht es, Standarddefinitionen der Mathematik auszudrücken.

Beispiel 1. Transitive Hülle R^P einer 2stelligen Relation P:

Übliche mathematische induktive Definition: R^P ist die kleinste Relation, für die gilt:

1. $(x,y) \in P$ impliziert $(x,y) \in R^P$,
2. $(x,z) \in R^P$ und $(z,y) \in P$ impliziert $(x,y) \in R^P$.

Versuch einer Formalisierung in Logik 1. Stufe :

$$\forall x, y\ [R(x,y) \equiv (P(x,y) \vee \exists z\ [R(x,z) \wedge P(z,y)])] \qquad (1)$$

erfasst nicht Minimalität. Beispiel, Konstanten a, b, c, d, Def. P wie folgt (graphische Darstellung):

a <-------> b
c <------ > d

Entsprechende Formel :

$$\begin{aligned} \forall x, y.\ P(x,y) \equiv \quad & [(x = a \ \wedge y = b) \vee \qquad (2) \\ & (x = b \ \wedge y = a) \vee \\ & (x = c \ \wedge y = d) \vee \\ & (x = d \ \wedge y = a)\ ] \end{aligned}$$

Es gibt Modelle M von (1), (2), in denen R zu groß ist:
z.B. sei die Domäne von M: $D^M = \{a, b, c, d\}$.
I interpretiere die Konstanten a,..,d zu sich selbst, P zu $\{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$ und die Interpretation von R in M sei:

$$R^M = \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}.$$

Man kann leicht überprüfen, dass M Modell der beiden Formeln ist. Man kann also insbesondere nicht wie gewünscht folgern: $\neg R(a,c)$, obwohl (a,c) offensichtlich nicht in der transitiven Hülle von P ist.

Man kann zeigen: es gibt keine Formel 1. Stufe, die für beliebige Relationen P deren transitive Hülle R^P definiert.

So geht's in Logik 2. Stufe
(x, y, v, w, z sind Individuenvariablen, r Prädikatsvariable):

$$
\begin{aligned}
\forall x, y.\ & R(x,y) \\
& \equiv \\
& [\forall r,v,w,z.\ (P(v,w) \supset r(v,w)) \wedge \\
& \qquad (r(v,z) \wedge P(z,w) \supset r(v,w)) \\
& \qquad \supset \\
& \qquad r(x,y)]
\end{aligned}
$$

Intuitiv: (x,y) ist in der transitiven Hülle von P wenn (x,y) in der Extension *jedes* Prädikates liegt, das die Bedingungen 1. und 2. der obigen mathematischen Definition erfüllt. Dann ist (x,y) nämlich insbesondere auch in der Extension des *kleinsten* Prädikats, das diese Bedingungen erfüllt.

Weiteres Beispiel: Def. der natürlichen Zahlen Nat, repräsentiert als 0, s(0), s(s(0)), …

Nat ist die kleinste Menge, so dass:

1. $0 \in$ Nat;
2. $t \in$ Nat impliziert $s(t) \in$ Nat.

Second order Definition (x, y Individuenvariablen, p Prädikatsvariable):

$$
\begin{aligned}
\forall x.\ & Nat(x) \\
& \equiv \\
& [\forall p.\quad p(0) \wedge [\forall y.\ p(y) \supset p(s(y))] \\
& \supset \\
& p(x)]
\end{aligned}
$$

Allgemein: x in kleinster Menge für die gilt Bedingung_1 … Bedingung_n
⇔ x in allen Mengen, die Bedingung_1 … Bedingung_n erfüllen